

**Experimente zur Potential- und Stromverteilung  
in Quanten-Hall-Systemen  
mit  
Einzelektron-Transistoren**

Von der Gemeinsamen Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina  
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

genehmigte  
D i s s e r t a t i o n

von  
**Torsten Klaffs**  
aus Wolfsburg

1. Referent: Prof. Dr. G. Nachtwei

2. Referent: Prof. Dr. R. J. Haug (Universität Hannover)

eingereicht am: 11.5.2004

mündliche Prüfung (Disputation) am: 12.7.2004

Druckjahr: 2004

# Vorveröffentlichungen der Dissertation

Teilergebnisse dieser Arbeit wurden mit Genehmigung der Gemeinsamen Naturwissenschaftlichen Fakultät, vertreten durch den Mentor, in folgenden Beiträgen vorab veröffentlicht:

- T. Klaffs, D. Presnov, V. A. Krupenin, J. Weis, and F. J. Ahlers: *Hysteresis of the electrical potential in the integer quantum Hall regime probed by an SET-electrometer*; Proc. of 15th International Conference on High Magnetic Fields in Semiconductor Physics, Clarendon Laboratory, Oxford, UK (2002).
- T. Klaffs, D. Presnov, V. A. Krupenin, J. Hüls, J. Weis, and F. J. Ahlers: *Hysteresis Effects due to Eddy Currents in the integer Quantum Hall regime probed by an SET-Electrometer*; Proc. of 4th Intern. EuroConf. on Advanced Semiconductor Devices and Microsystems, Smolenice Castle, Slovakia, 337-340, ISBN/ISSN 0-7803-7276-X (2002).
- T. Klaffs, V. A. Krupenin, J. Weis, and F. Ahlers: *Eddy currents in the integer Quantum Hall regime, probed by an SET-Electrometers*; proc. of 11th International Symposium NANO-STRUCTURES: Physics and Technology, St. Petersburg, Russia, 109-110, ISBN 5-93634-009-0 (2003).
- T. Klaffs, V. Krupenin, J. Weis, and F. Ahlers: *Eddy Currents in the Integer Quantum Hall Regime, Spatially Resolved by Multiple-SET-Electrometers*, International Symposium Quantum Hall Effect: Past, Present and Future, Stuttgart (2003).
- T. Klaffs, V. A. Krupenin, J. Weis, and F. J. Ahlers: *Eddy Currents in the Integer Quantum Hall Regime, Spatially Resolved by Multiple-SET-Electrometers*; proc. of 15th International Conference on Electronic Properties of Two-Dimensional Systems, Nara, Japan, Physica E **22**, 737-740 (2004).



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen zum Quanten-Hall-Effekt</b>	<b>15</b>
2.1	Das zweidimensionale Elektronensystem (2DES)	15
2.2	2DES mit senkrechtem Magnetfeld	18
2.3	Der Schubnikov-de Haas-Effekt	21
2.4	Quanten-Hall-Effekt	24
<b>3</b>	<b>Der Einzelelektron-Transistor</b>	<b>31</b>
3.1	Coulomb-Blockade	32
3.2	Die Einzelelektronen-Box	35
3.3	Der SET	37
<b>4</b>	<b>Probenherstellung und Meßtechnik</b>	<b>41</b>
4.1	Herstellung der Marker	42
4.2	Ätzen der Hall-Barren	43
4.3	Herstellung der ohmschen Kontakte	43
4.4	Herstellung der SETs	44
4.5	Meßtechnik	46
<b>5</b>	<b>Lokale Änderungen im chemischen Potential eines 2DES</b>	<b>47</b>
5.1	Chemisches, elektrostatisches und elektrochemisches Potential	47
5.2	Der SET als Potentialsonde für ein 2DES	48
5.3	Messen mit einer Rückkoppelschleife	50
5.4	Einfluß der SET-Sonde auf das 2DES	54
5.5	Zusammenfassung	55
<b>6</b>	<b>Elektronische Eigenschaften des 2DES am Rand</b>	<b>57</b>
6.1	Physikalische Bedeutung des Probenrandes	57
6.2	Detektion inkompressibler Streifen mit einem SET	60
6.3	Einfluß der Temperatur auf die inkompressiblen Streifen	66
6.4	Zusammenfassung	67
<b>7</b>	<b>Nichtgleichgewichtsphänomene</b>	<b>69</b>
7.1	Elektrostatische Potentialänderungen im 2DES	73
7.2	Korrelationsmessungen	76

7.3	Wirbelströme am Rand eines Hall-Barrens . . . . .	80
7.4	Dynamisches Verhalten der Wirbelströme . . . . .	85
7.5	Relaxationsprozesse bei kleinen Füllfaktoren . . . . .	90
7.6	Temperaturabhängigkeit der Wirbelstromstärke . . . . .	96
7.7	Zusammenfassung . . . . .	100
<b>8</b>	<b>Der Einfluß eines extern aufgeprägten Stromes</b>	<b>101</b>
8.1	Experimenteller Aufbau . . . . .	104
8.2	Gibt es noch Wirbelströme? . . . . .	104
8.3	Wo fließt der aufgeprägte Strom? . . . . .	106
8.4	Zusammenfassung . . . . .	111
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>113</b>
<b>A</b>	<b>Daten der verwendeten Proben</b>	<b>117</b>

# Symbole und Abkürzungen

2DES	zweidimensionales Elektronensystem
$a_B^*$	effektiver Bohr-Radius
$a_k$	Breite eines inkompressiblen Randstreifens
$\vec{A}$	Vektorpotential
$A$	Fläche
$b$	Probenbreite
$B$	äußeres Magnetfeld
$C$	Kapazität
$C_D$	Kapazität zwischen SET-Insel und Drain-Elektrode
$C_G$	Kapazität zwischen SET-Insel und Gate-Elektrode
$C_{\text{Rand}}$	Kapazität zwischen Rand und Bulk einer Probe
$C_S$	Kapazität zwischen SET-Insel und Source-Elektrode
$C_{SG}$	Kapazität zwischen SET-Insel und Seitengate-Elektrode
$C_\Sigma$	Gesamtkapazität der SET-Insel
$d_s$	Dicke der Spacerschicht
$D(E)$	Zustandsdichte
$D_0$	Zustandsdichte bei $B = 0$
$D_{B>0}$	Zustandsdichte mit Magnetfeld
$e$	Elementarladung
$E$	Energie
$E_c$	Ladungsenergie
$E_{elst}$	elektrostatische Energie
$E_F$	Fermi-Energie
$E_F^0$	Fermi-Energie bei $B = 0$
$\Delta E_G$	elektrostatische Potentialänderung eines Elektrons auf der SET-Insel
$\Delta E_{I-S}$	Ladungsenergie eines Tunnelprozesses von der Insel zur Source-Elektrode
$\Delta E_{I-D}$	Ladungsenergie eines Tunnelprozesses von der Insel zur Drain-Elektrode
$E_L$	Energie des Leitungsbandes
$E_N$	Landau-Energie
$E_\nu$	Energie-Eigenwerte des 2DES
$\Delta E_{S-I}$	Ladungsenergie eines Tunnelprozesses von der Source-Elektrode zur Insel
$\epsilon$	Dielektrizitätskonstante
$f(E)$	Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion
$F$	elektrisches Feld
$F_c$	Kritische Feldstärke (Breakdown)
$\Gamma$	Halbwertsbreite eines Landau-Niveaus
$g^*$	Landé-Faktor
$h$	Planck'sche Konstante
$\hbar$	$h/2\pi$
$H$	Hamilton-Operator
$I$	Probenstrom
$I_c$	kritische Stromstärke (Breakdown)

$I_{SET}$	Strom durch den SET
$I_W$	Wirbelstromstärke
$J_c$	kritische Stromdichte (Breakdown)
$J_m$	Element des Stromdichtevektors
$k_B$	Boltzmann-Konstante
$k_F$	Fermi-Wellenvektor
$k_x, k_y$	Komponenten des Wellenvektors
$l$	Probenlänge
$l_b$	magnetische Länge
$L_x, L_y$	Ausdehnung des 2DES
$m$	Elektronenmasse
$m^*$	effektive Elektronenmasse
$\mu$	Elektronenbeweglichkeit
$\mu_b$	Bohrsches Magneton
$\mu_{ch}$	chemisches Potential
$\mu_{elch}$	elektrochemisches Potential
$\mu_{elst}$	elektrostatisches Potential
MBE	Molekularstrahl-Epitaxie
MIBK	2-Methyl-4-Pentanon
MOVPE	Metallorganische Gasphasenepitaxie
MOS	Metal Oxide Semiconductor
$n$	Ladungsträgerkonzentration
$n_l$	lokale Ladungsträgerkonzentration
$\delta n_l$	mittlere quadratische Abweichung der lokalen Ladungsträgerkonzentration
$n_\nu$	Ladungsträgerkonzentration der einzelnen Subbänder
$n_L$	Entartungsgrad
$\nu$	Füllfaktor
$\nu_l$	lokaler Füllfaktor
$N_c$	höchstes besetztes Subband im eindimensionalen Kanal
$\Delta N$	Anzahl der zusätzlichen Elektronen auf der SET-Insel
$p_x, p_y$	Impuls in x- bzw. y-Richtung
PID-Regler	Proportional-Integral-Differential-Regler
PMMA	Polymethylmethacrylat
PTB	Physikalisch-Technische-Bundesanstalt
$q, Q$	elektrische Ladung
QHE	Quanten-Hall-Effekt
QUILLS	quasi-elastic inter-Landau-level scattering
$r$	Radius
$r_c$	Zyklotronradius
$R_0$	Widerstand bei $B=0$
$R_K$	von Klitzing-Konstante
$R_{xx}$	$=U_x/I$ , Widerstand in Längsrichtung
$R_{xy}$	$=U_y/I$ , Widerstand in Querrichtung (Hall-Widerstand)
$\rho$	spezifischer Widerstand
$\rho_0$	spezifischer Widerstand bei $B=0$



$\rho_{mn}$	Element des (spezifischen) Widerstandstensors
$\rho_{xx}$	spezifischer Längswiderstand
$\rho_{xy}$	spezifischer Hall-Widerstand
REM	Raster-Elektronenmikroskop
RIE	Reactive Ion Etching
$s$	Spin-Quantenzahl
$\underline{\underline{\sigma}}$	Leitfähigkeitstensor
$\sigma_0$	spezifische Leitfähigkeit bei $B = 0$
$\sigma_{mn}$	Element des (spezifischen) Leitfähigkeitstensors
$\sigma_{xx}$	spezifische Längsleitfähigkeit
$\sigma_{xy}$	spezifische Hall-Leitfähigkeit
$\sigma_{1D}$	Leitfähigkeit eines eindimensionalen Kanals
SdH	Schubnikov-de Haas
SET	Einzelelektron-Transistor (Single Electron Transistor)
$T$	Temperatur
$T_D$	Dingle-Temperatur
$\tau_q$	Quantenstreuzeit
$\tau_{1,2}$	Relaxationszeiten
TLM	Top Loading Mode
$\Theta$	Streuwinkel
$\Theta_c$	kritischer Streuwinkel
$U$	elektrische Spannung
$U_c$	Kontaktspannung
$U_G$	Gate-Spannung (Spannung zwischen 2DES und SET)
$U_{DS}$	Spannung zwischen Source- und Drain-Elektrode
$U_{DS}^{th}$	Schwellspannung für einen Tunnelstrom
$U_{FB}$	Signal der Rückkoppelschleife
$U_{GS}$	Spannung zwischen Source- und Gate-Elektrode
$U_{ind}$	induzierte Spannung
$U_H$	Hall-Spannung
$U_{Ref}$	Referenzspannung der Rückkoppelschleife
$U_{SG}$	Spannung am Seitengate
$U_{SG}^0$	Spannung am Seitengate, ab welcher das 2DES darunter vollständig verarmt
$U_x$	Spannungsabfall in Längsrichtung
$U_y$	Spannungsabfall in Querrichtung (Hall-Spannung)
$V(z)$	eindimensionaler Potentialtopf
$W_{1,2}$	Austrittsarbeiten
$W_{kk'}$	Übergangswahrscheinlichkeit eines Streuprozesses
$X_0, Y_0$	Schwerpunktskoordinaten
$y_k$	Abstand eines inkompressiblen Randstreifens zum Rand
$z_{2DES}$	vertikaler Abstand des Seitengates zum 2DES
$\Phi$	magnetischer Fluß
$\Phi_0$	magnetischer Flußquant
$\omega_c$	Zyklotronfrequenz
$\Psi(\vec{r})$	Wellenfunktion



# Kapitel 1

## Einleitung

Weniger als 100 Jahre nach der Entdeckung des Hall-Effekts durch *Edwin Hall* im Jahre 1879 [Sop80] untersuchte *Klaus von Klitzing* den Hall-Effekt an zweidimensionalen Elektronensystemen (2DES) in Silizium MOS-Feldeffekttransistoren bei sehr tiefen Temperaturen und hohen Magnetfeldern. Er machte dabei eine erstaunliche Entdeckung: Im Gegensatz zum klassischen Verlauf, wo der Hall-Widerstand  $R_{xy} = \frac{U_y}{I}$  proportional zum angelegten Magnetfeld ist, beobachtete er eine stufenförmige Entwicklung des Hall-Widerstandes mit dem Magnetfeld [Kli80]. Auf den Stufen - den so genannten Plateaus - zeigt der Hall-Widerstand bei diesem als *Quanten-Hall-Effekt* (QHE) bezeichneten Effekt keine meßbare Variation, wenn das Magnetfeld leicht variiert wird.

Die quantisierten Werte des Hall-Widerstandes betragen  $R_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}$  mit einer Unsicherheit von weniger als  $10^{-7}$  [Jef98] und hängen somit nur von den Naturkonstanten  $h$  (Planck'sche Konstante),  $e$  (Elementarladung) und einer ganzen Zahl ( $\nu$ ) ab. Die verwendete Form der Hall-Barren, sowie das Material, mit dem das 2DES realisiert wird, scheinen hierbei für die Genauigkeit keine Rolle zu spielen.

Bereits 5 Jahre nach dieser Entdeckung wurde Klaus von Klitzing dafür der Nobelpreis für Physik verliehen. Obwohl es sich um einen so fundamentalen Effekt handelt, konnte auch nach inzwischen mehr als 20 Jahren intensiver Forschungsaktivität<sup>1</sup>, in der auch noch ein weiterer Nobelpreis für die Entdeckung des *fraktionalen* Quanten-Hall-Effekts verliehen wurde<sup>2</sup>, vieles nicht geklärt werden. Eine sehr wichtige ungelöste Frage ist bis heute, wo mikroskopisch ein von außen aufgeprägter Strom durch das 2DES fließt und die Hall-Spannung aufbaut. Gleiches gilt für durch eine Variation des Magnetfeldes induzierte Wirbelströme.

Verschiedene theoretische Modelle wurden entwickelt, die den Strom entweder vor allem durch das Innere oder vor allem entlang des Randes einer Probe vorhersagen [Kli93, Kli95, And94]. Die intrinsische statische Potentiallandschaft, die im Innern der Probe aufgrund der Donatorverteilung, der Legierungsfluktuationen und Grenzflächenrauigkeiten existiert, sorgt für Streuung der Elektronen und für Inhomogenitäten in der Elektronenkonzentration. Sie bestimmt die Breite der Quanten-Hall-Plateaus und scheint auch eine entscheidende Rolle für das Hall-Potentialprofil über die Probe im Quanten-Hall-Bereich zu spielen.

Elektrostatistische Modellrechnungen in Thomas-Fermi-Näherung beschreiben für den Randbereich des 2DES, wo die Elektronenkonzentration aufgrund der Begrenzung auf Null abfällt, das

---

<sup>1</sup>Zwischen 1985 und 1995 wurden jährlich ca. 200 Arbeiten zum QHE verfaßt, ab 1995 verdoppelte sich diese Zahl sogar.

<sup>2</sup>D. Tsui, H. Störmer und R. Laughlin (1998) [Tsu82].

Auftreten sogenannter kompressibler und inkompressibler Streifen entlang des Randes. Diese unterscheiden sich in ihren elektrischen Eigenschaften (gute/schlechte Abschirmeigenschaften, leitend/nichtleitend). Solche kompressiblen und inkompressiblen Bereiche sollten auch im Innern des 2DES auftreten, aufgrund der Inhomogenitäten in der Elektronenkonzentration durch die (oben schon beschriebenen) intrinsischen Potentialfluktuationen in den Proben.

In den Experimenten zu dieser Arbeit wurden metallische Einzelektron-Transistoren (SET<sup>3</sup>s) dazu verwendet, sehr hoch orts aufgelöste Potentialmessungen an zweidimensionalen Elektronensystemen im Quanten-Hall-Regime durchzuführen. Aufbauend auf den ersten Messungen dieser Art [Wei97, Hül01] wurde die Größe der SETs erheblich verkleinert, was nicht nur eine deutlich höhere Ortsauflösung bietet, sondern erstmals auch Messungen mit SETs auf  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Heterostrukturen bei Temperaturen oberhalb von  $T=1$  K ermöglicht hat. Des weiteren wurde bei der Herstellung der SETs darauf geachtet, parasitären 'Schatten' in der Nähe der sensitiven SET-Inseln durch einen verbesserten Herstellungsprozeß zu vermeiden.

Besondere Aufmerksamkeit wurde bei den anschließenden Messungen Nichtgleichgewichtsphänomenen gewidmet, welche dann entstehen, wenn das Magnetfeld in den quasi-dissipationsfreien QHE-Plateaubereichen variiert wird. In diesen Regimen werden schon bei kleinster Variation des Magnetfeldes starke Wirbelströme induziert [Jon95], welche aufgrund des anliegenden Magnetfeldes eine Hall-Spannung zwischen dem Randbereich und dem Zentrum der Probe aufbauen. Im Bezug auf diese Thematik wird bereits sehr lange diskutiert, ob es sich um einzelne, im 2DES induzierte Wirbelströme handelt oder um einen großen, globalen Nettostrom, welcher entlang des Probenrandes fließt. Um diese Frage zu klären, wurde eine neue Meßmethode entwickelt, welche es ermöglicht, gleichzeitig an unterschiedlichen Orten auf einer Probe mit mehreren SETs Potentialmessungen durchzuführen. Auch der Pfad eines extern aufgeprägten Stromes und dessen Einfluß auf die Wirbelströme konnten so untersucht werden. Die Arbeit gliedert sich dabei wie folgt:

- **In Kapitel 2** werden die Physik und Herstellung zweidimensionaler Elektronensysteme, sowie die Grundlagen des ganzzahligen QHEs besprochen.
- **In Kapitel 3** wird die Funktion eines Einzelektron-Transistors beschrieben.
- **In Kapitel 4** werden die unterschiedlichen Prozeßschritte der Probenherstellung erläutert.
- **In Kapitel 5** wird erklärt, wie man mit einem SET Änderungen im chemischen Potential eines 2DES messen kann.
- **In Kapitel 6** werden Messungen vorgestellt, bei denen die elektronischen Eigenschaften des Randbereiches eines 2DES mit einem SET untersucht werden. Es werden inkompressible Streifen bis hin zu hohen Füllfaktoren abgebildet. Eine Erhöhung der Temperatur auf  $T = 500$  mK zeigt zum ersten Mal ein 'Aufschmelzen' dieser Streifen.
- **In Kapitel 7** werden durch eine Variation des Magnetfeldes induzierte Nichtgleichgewichtsphänomene untersucht. Es wird gezeigt, daß in den QHE-Plateaubereichen schon eine leichte Variation des Magnetfeldes ausreicht, um Wirbelströme zu induzieren, deren Stärke und Dämpfung sehr stark von den Parametern *Probenqualität*, *Energielücke des Füllfaktors* und

---

<sup>3</sup>Single Electron Transistor

der *Temperatur* abhängen. Korrelationsmessungen mit mehreren SETs zeigen dabei, daß die Spannungen in einem Schmalen Streifen am Rand einer Probe abfallen und es sich um einen globalen Effekt handelt.

- **In Kapitel 8** werden schließlich Messungen gezeigt, bei denen mit einem SET der Spannungsabfall eines von außen aufgeprägten Stromes orts aufgelöst gemessen und dessen Einfluß auf die Induktion von Wirbelströmen untersucht wird. Diese Messungen werden mit den jüngst von Erik Ahlswede [Ahl02] durchgeführten Rasterkraft-Messungen verglichen.



# Kapitel 2

## Grundlagen zum Quanten-Hall-Effekt

### 2.1 Das zweidimensionale Elektronensystem (2DES)

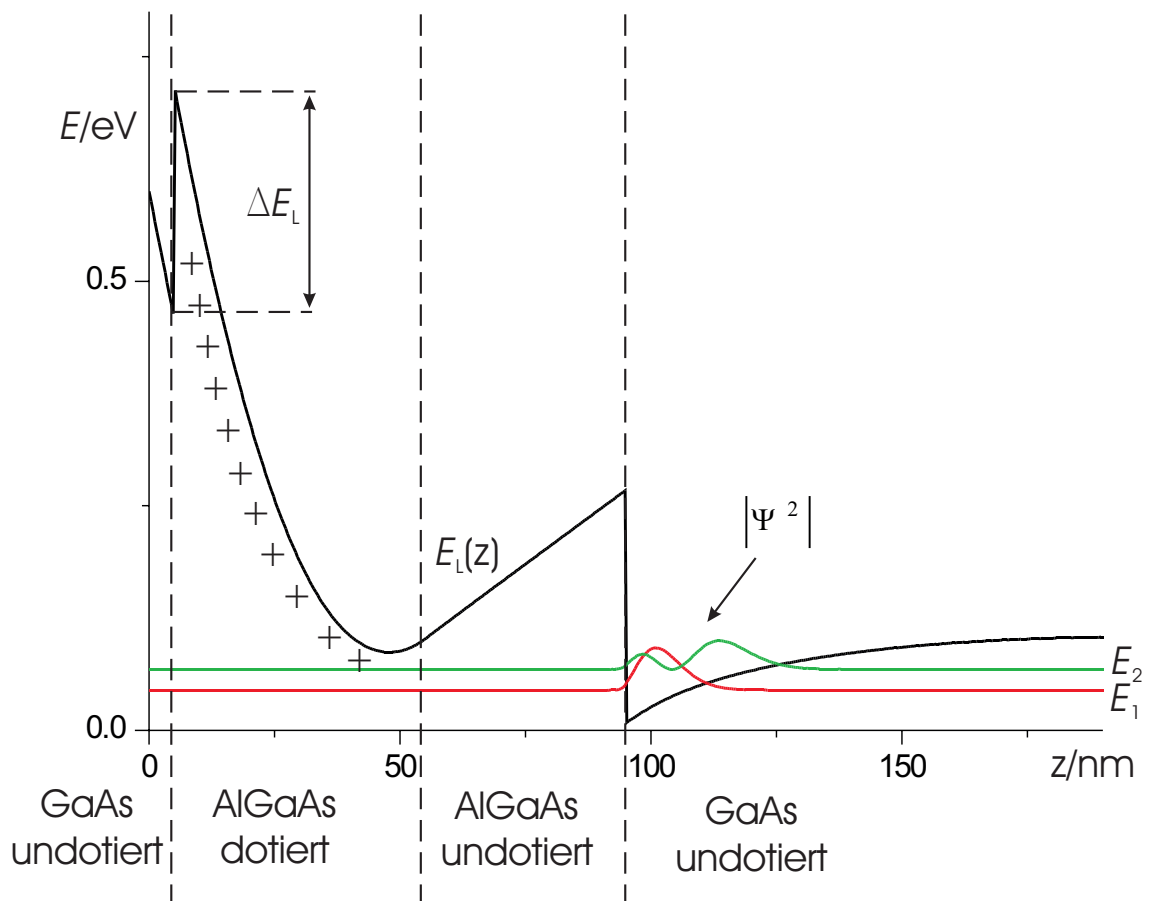


Abbildung 2.1: Schichtenfolge einer GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Heterostruktur. Aus der dotierten AlGaAs-Schicht diffundieren die Ladungsträger in den nahezu dreieckigen Potentialtopf an der Grenzfläche zwischen GaAs und AlGaAs und bilden ein zweidimensionales Elektronensystem. Der Bandverlauf und die Wellenfunktionen der beiden dargestellten gebundenen Zustände  $E_1$  und  $E_2$  wurden mit dem Programm 1D-Poisson-Schrödinger von Greg Snider [Sni90] berechnet.

Im Gegensatz zu den in den 80er Jahren viel verwendeten zweidimensionalen Elektronensystemen in der Inversionsschicht zwischen Si und SiO<sub>2</sub> eines Feldeffekt-Transistors verwendet man heute für den Quanten-Hall-Effekt fast ausschließlich mit epitaktischen Verfahren gewachsene Halbleiter-Heterostrukturen. Bewährt haben sich dabei vor allem GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As-Heterostrukturen, hergestellt mit Molekularstrahl-Epitaxie (MBE) oder metallorganischer Gasphasenepitaxie (MOVPE).

Der Vorteil des Materialsystems GaAs-Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As liegt darin, daß beim Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As der Aluminiumgehalt verändert werden kann, ohne dabei die Gitterkonstante merklich zu ändern. Ein Aluminiumgehalt von 45% erhöht die Bandlücke von GaAs von 1.52 eV auf ca. 2 eV bei tiefen Temperaturen [Cas8]. Weiteres Erhöhen des Aluminiumgehaltes birgt allerdings das Problem, daß die indirekte Bandlücke im X-Punkt kleiner wird als die direkte im  $\Gamma$ -Punkt und somit aus einem direkten Halbleiter ein indirekter wird.

Abbildung 2.1 zeigt den typischen Aufbau einer GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As-Heterostruktur mit einem zweidimensionalen Elektronensystem an der Grenzfläche zwischen GaAs und AlGaAs. Rechts befindet sich das undotierte GaAs-Substrat, auf welches eine ca. 1  $\mu$ m dicke GaAs-Schicht aufgewachsen wurde<sup>1</sup>. Darauf folgen eine 40 nm dicke AlGaAs-Schicht, durch die die freien Ladungsträger aus der folgenden dotierten AlGaAs-Schicht in den nahezu dreiecksförmigen Potentialtopf an der Grenzfläche diffundieren. Die obere, 5 nm dicke, GaAs-Deckschicht dient zum Schutz der Struktur, da AlGaAs leicht oxidiert. Da die Ladungsträger sich durch die Spacer-Schicht relativ weit entfernt von den ionisierten Donatoratomen befinden, erreichen diese Strukturen Elektronenbeweglichkeiten, die bis zum Faktor 1000 über denen von reinem GaAs liegen.

Im folgenden wird die Annahme gemacht, daß die Elektronen sich quasi-frei in der x-y-Ebene bewegen können und in einem eindimensionalen Potentialtopf  $V(z)$  (siehe Abbildung 2.1) eingefangen sind. Die Schrödingergleichung lautet in diesem Fall:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi(\vec{r}) + V(z)\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) . \quad (2.1)$$

Mit dem Ansatz

$$\Psi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} e^{i(k_x x + k_y y)} \cdot \chi(z) \quad (2.2)$$

erhält man die eindimensionale Schrödingergleichung

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2}{dz^2} + V(z) \right) \chi(z) = E\chi(z) . \quad (2.3)$$

Lösungen dieses Systems haben die Eigenwerte  $E_\nu$ :

$$E_\nu(k_x, k_y) = \frac{\hbar^2(k_x^2 + k_y^2)}{2m^*} + E_\nu . \quad (2.4)$$

Im hier untersuchten 2DES ist das Potential nahezu dreieckig. Exakte theoretische Berechnungen findet man unter anderem in der Arbeit von T. Ando, Fowler und Stern (1982) [And82] und in der von W. Zawadzki (1984) [Zaw84]. Ando [And82] beschreibt das Potential folgendermaßen:

$$V(z) = \begin{cases} \infty & : z \leq z_{2DES} \\ eFz & : z > z_{2DES} \end{cases} . \quad (2.5)$$

<sup>1</sup>Man könnte auch direkt auf das Substrat wachsen. Das oben beschriebene Verfahren stellt allerdings eine deutlich sauberere Grenzfläche für den Heteroübergang zur Verfügung.



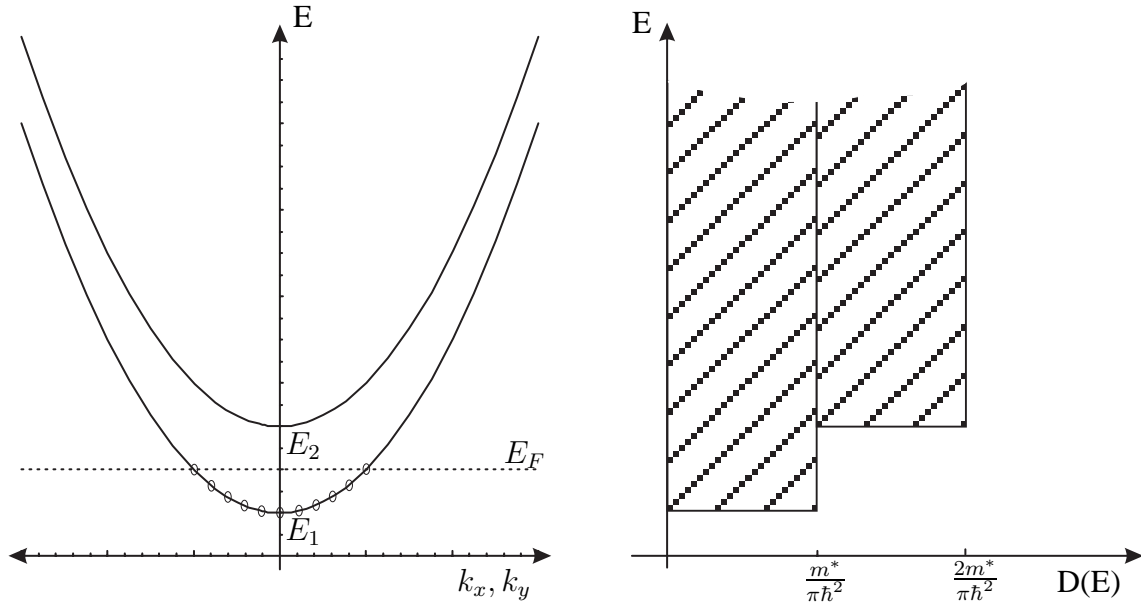


Abbildung 2.2: Subbandstruktur des zweidimensionalen Elektronensystems ohne Magnetfeld.

Dabei setzt sich das elektrische Feld  $F$  aus dem der ionisierten Störstellen ( $F_0$ ) und dem Feld aller ( $N_s$ ) Elektronen in der zweidimensionalen Schicht zusammen:

$$F = F_0 + \frac{eN_s}{2\epsilon_0\epsilon_r} . \quad (2.6)$$

Zawadzki [Zaw84] gibt folgende Näherungslösung für die Eigenenergien des Potentialproblems an<sup>2</sup>:

$$E_\nu = \left( \frac{\hbar}{2m^*} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left[ \frac{3\pi}{2} eF \cdot \left( \nu + \frac{3}{4} \right) \right]^{\frac{2}{3}} . \quad (2.7)$$

Die Ladungsträgerkonzentration  $n$  ist das Integral der Zustandsdichte bis zur Fermi-Energie:

$$n = \int_{E_1}^{\infty} D(E) \cdot f(E) dE . \quad (2.8)$$

Für die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion  $f(E)$  gilt bei tiefen Temperaturen:

$$f(E) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq E \leq E_F \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} . \quad (2.9)$$

Jedes Subband eines 2DES hat die Zustandsdichte (z. B. [Dav98]):

$$D(E) = \frac{m^*}{\pi\hbar^2} . \quad (2.10)$$

<sup>2</sup>Es ist schön, wenn es eine analytische (Näherungs-) Lösung gibt. In der Praxis hat es sich jedoch bewährt, numerische Simulationsprogramme, wie z. B. den *1D-Poisson-Schrödinger solver* von Greg Snider [Sni90] zu verwenden.

Die Ladungsträgerkonzentration  $n$  ist Summe der Ladungsträgerkonzentrationen  $n_\nu$  der einzelnen Subbänder:

$$n = \sum_{\nu} n_{\nu} . \quad (2.11)$$

Ist nur ein Subband besetzt, was bei sämtlichen in dieser Arbeit behandelten Proben der Fall ist, gilt mit Gleichung 2.8:

$$n = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} E_F . \quad (2.12)$$

## 2.2 2DES mit senkrechtem Magnetfeld

Unter Einfluß eines (senkrechten) magnetischen Feldes kommt es im 2DES zur sogenannten *Landau-Quantisierung*. Im senkrechten Fall zeigt das Feld in z-Richtung ( $\vec{B} = (0, 0, B)$ ), was in symmetrischer Eichung mit einem Vektorpotential der Form

$$\vec{A} = \left( -\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0 \right) \quad (2.13)$$

beschrieben werden kann. Zusätzlich muß beim Hamilton-Operator noch das Potential in z-Richtung berücksichtigt werden. Dies führt zu folgender Schrödingergleichung:

$$\left( \frac{1}{2m^*} \left( -i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A} \right)^2 + V(z) \right) \Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = E(\vec{k}) \Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) . \quad (2.14)$$

Mit dem Separationsansatz

$$\Psi(\vec{r}) = \phi(x, y) \chi(z) \quad (2.15)$$

und  $p_x = \hbar k_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $p_y = \hbar k_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$  sieht der Hamilton-Operator dann folgendermaßen aus:

$$H = \underbrace{\frac{1}{2m^*} \left[ \left( p_x^2 - eBy p_x + \frac{e^2 B^2}{4} y^2 \right) + \left( p_y^2 + eBx p_y + \frac{e^2 B^2}{4} x^2 \right) \right]}_{H_1} + \underbrace{\left( V(z) + \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)}_{H_2} . \quad (2.16)$$

$H_2$  ist mit dem Operator für das 2DES ohne Magnetfeld identisch und hat als Lösung die Eigenenergien  $E_\nu$  der einzelnen Subbänder (vgl. 2.4).  $H_1$  läßt sich umformen zu:

$$H_1 = \frac{1}{2m^*} \left[ \left( p_y^2 + eBx p_y + \frac{e^2 B^2}{4} x^2 \right) + \left( p_x^2 - eBy p_x + \frac{e^2 B^2}{4} y^2 \right) \right] \quad (2.17)$$

$$= \frac{1}{2m^*} \left( \frac{eB}{2} \right)^2 \cdot \left[ \left( x + \frac{2\hbar k_y}{eB} \right)^2 + \left( y - \frac{2\hbar k_x}{eB} \right)^2 \right] \quad (2.18)$$

$$= \frac{1}{2} m^* \omega^2 \left[ (x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 \right] , \quad (2.19)$$

mit  $\omega = \frac{1}{2}\omega_c = \frac{1}{2} \frac{eB}{m^*}$ ,  $X_0 = -\frac{2\hbar k_y}{eB}$ ,  $Y_0 = \frac{2\hbar k_x}{eB}$ . Somit beschreibt  $H_1$  einen quantenmechanischen 2D-Oszillator um einen um  $Y_0$ ,  $X_0$  verschobenen Schwerpunkt. Lösung des Systems sind dann die Eigenenergien<sup>3</sup>:

<sup>3</sup>Eine ausführliche Behandlung dieses quantenmechanischen Problems findet sich in gängigen Lehrbüchern der Quantenmechanik, z. B. [Hit72].

$$E_N = \left(N + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c, \quad (2.20)$$

bzw. unter Berücksichtigung des Spins:

$$E_N = \left(N + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c + s g^* \mu_b B \quad \left\{ \begin{array}{l} N = 0, 1, 2, \dots \\ s = \pm \frac{1}{2} \end{array} \right., \quad (2.21)$$

welche als *Landau-Niveaus* bezeichnet werden.  $s$  ist die Spin-Quantenzahl,  $\mu_b$  das Bohrsche Magneton und  $g^*$  der Landé-Faktor.

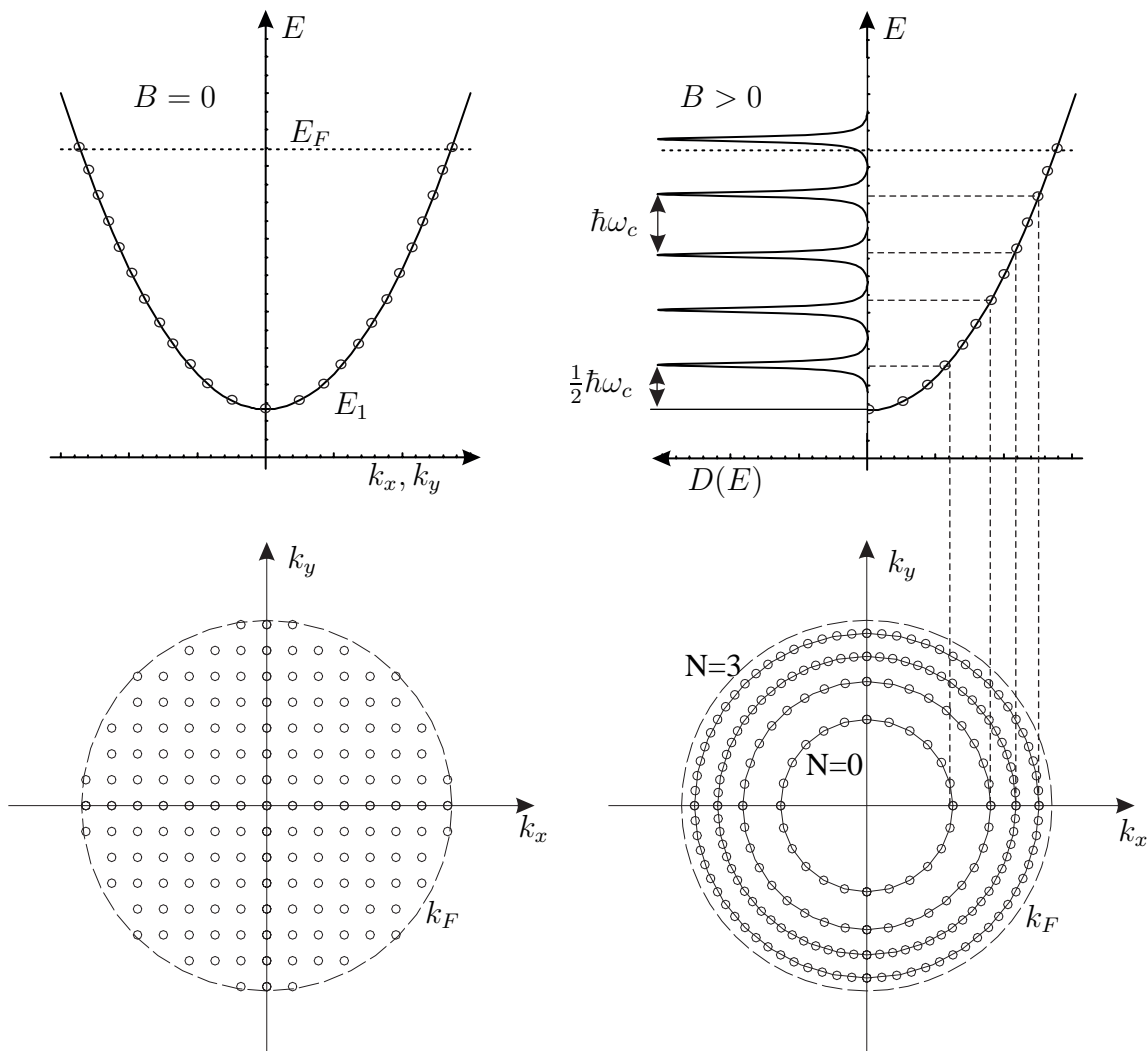


Abbildung 2.3: Quantisierung des 2DES mit und ohne Magnetfeld.

Klassisch betrachtet beschreibt dies eine Kreisbewegung eines Elektrons um den Punkt  $(X_0, Y_0)$ . Läßt man den Elektronenspin  $s$  einmal außer acht, resultieren daraus Zyklotronradien mit dem Radius

$$r_c = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} (2N + 1) \quad (2.22)$$

$$= l_b \sqrt{2N + 1} . \quad (2.23)$$

$l_b = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$  wird als magnetische Länge bezeichnet und entspricht dem Radius einer klassischen Zyklotronbahn. Quantenmechanisch betrachtet entspricht sie der räumlichen Ausdehnung der Wellenfunktion  $\Psi(\vec{r})$ .

Da mit eingeschaltetem Magnetfeld innerhalb eines Subbandes nur noch Zustände auf Landau-Niveaus erlaubt sind, spaltet die Zustandsdichte in eine Summe hoch entarteter  $\delta$ -Peaks auf:

$$D_{B>0} = \sum_{N,s} n_L \cdot \delta(E - E_{N,s}) = D_0 , \quad (2.24)$$

wobei  $n_L = \hbar\omega_c D_0$  der Entartungsgrad eines Landau-Niveaus ist. Bei der Zustandsdichte muß bei dieser Betrachtung die Aufhebung der Spin-Entartung berücksichtigt werden, so daß nach Gleichung 2.10 gilt:

$$D_0 = \frac{m^*}{2\pi\hbar^2} . \quad (2.25)$$

Für den Entartungsgrad  $n_L$  gilt demnach:

$$n_L = \frac{eB}{h} . \quad (2.26)$$

Das Verhältnis aus Ladungsträgerkonzentration  $n$  und Entartungsgrad  $n_L$  wird als *Füllfaktor*  $\nu$  bezeichnet. Die Magnetfelder ganzzahliger Füllfaktoren liegen demnach bei den Werten:

$$B_\nu = \frac{h}{e} \cdot \frac{n}{\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots . \quad (2.27)$$

Die  $\delta$ -Peaks aus Gleichung 2.24 können als Lorenz- oder Gauß-Funktionen genähert werden [And74], wie sie auch in Abbildung 2.3 dargestellt werden:

$$D_{B>0}(E) = \frac{eB}{h} \sum_{N,s} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Gamma^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{E - E_{N,s}}{\Gamma} \right)^2 \right] . \quad (2.28)$$

$\Gamma$  ist dabei die Halbwertsbreite der Landau-Niveaus im ersten Subband.  $\Gamma$  ist folgendermaßen mit der Quantenstreuzeit  $\tau_q$  verknüpft [Das85]:

$$\Gamma = \frac{\hbar}{2\tau_q} , \quad (2.29)$$

$\tau_q$  berechnet sich nach [Har85] zu:<sup>4</sup>

$$\frac{1}{\tau_q} = \int_{\Theta_c}^{2\pi - \Theta_c} W_{kk'} dk' . \quad (2.30)$$

---

<sup>4</sup>Im Gegensatz zur klassischen Streuzeit:  $\frac{1}{\tau} = \int_0^{2\pi} W_{kk'} \cdot (1 - \cos(\theta)) dk'$

$W_{kk'}$  beschreibt die Übergangswahrscheinlichkeit eines Streuprozesses im Winkel  $\Theta$  von  $k$  nach  $k'$ . Durch die Integrationsgrenzen wird berücksichtigt, daß Streuwinkel in einem kleineren Winkel als  $\Theta_c$  nicht zu einer Phasenstörung der Zyklotronbahn führen und somit nicht zum eigentlichen Magnetowiderstand beitragen [Ter73]. Eine oft verwendete Größe für die Quantenstreuzeit ist die sogenannte Dingle-Temperatur  $T_D$ . Sie ist über die Beziehung

$$k_B T_D = \frac{\hbar}{2\pi} \frac{1}{\tau_q} \quad (2.31)$$

mit der Quantenstreuzeit verknüpft und wird oft als charakteristischer Streuparameter verwendet.

## 2.3 Der Schubnikov-de Haas-Effekt

In Abschnitt 2.2 wurde gezeigt, wie die Zustände auf den Subbandparabeln in Landau-Niveaus aufspalten. Von 'oben' betrachtet sind dies konzentrische Kreise um  $k = 0$ , die bis zur Fermi-Energie mit Ladungsträgern gefüllt sind (siehe Abbildung 2.3). Vergrößert man das anliegende  $B$ -Feld, so müssen diese Landau-Niveaus aus dem Fermi-Kreis herauswandern, und es kommt zwangsläufig zu einer Umverteilung auf innere Landau-Niveaus. Beim Durchlauf eines Landau-Niveaus durch den Fermi-Kreis ist die Streuwahrscheinlichkeit extrem groß, und der elektrische Widerstand zeigt ein lokales Maximum, da im entarteten Halbleiter nur Elektronen mit der Energie  $E \approx E_F \pm k_B T$  zum Ladungstransport beitragen. Liegt im Gegensatz dazu die Fermi-Energie gerade zwischen<sup>5</sup> zwei Landau-Niveaus, so sind im Prinzip keine elastischen Stöße innerhalb des Niveaus möglich, da alle Zustände besetzt sind. Für inelastische Stöße auf ein energetisch höheres Landau-Niveau stehen bei extrem tiefen Temperaturen nur noch extrem wenig Phononen zur Verfügung, die die benötigte Energie zur Verfügung stellen könnten. Der Widerstand wird sehr gering oder verschwindet im Grenzfall ganz. Für die Widerstandsmaxima lautet daher die Bedingung<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} E_F &= E_N(B) \\ &= \frac{\hbar e B}{m^*} \left( N + \frac{1}{2} \right) . \end{aligned} \quad (2.32)$$

Mit dem Ohmschen Gesetz kann die Leitfähigkeit im Magnetfeld durch einen Tensor beschrieben werden:

$$J_m = \sum_n \sigma_{mn}(\vec{B}) \cdot F_n . \quad (2.33)$$

Fließt der Strom in  $x$ -Richtung und fällt die elektrische Spannung nur in Längsrichtung über eine Länge  $l$  ab und hat das 2DES die Breite  $b$  (vgl. Abbildung 2.4), so wird aus  $J_x = \sigma_{xx} \cdot F_x$  mit  $J_x = \frac{I}{b}$  und  $F_x = \frac{U_x}{l}$

$$I = \sigma_{xx} \cdot \frac{b}{l} \cdot U_x \quad (2.34)$$

$$= \frac{U_x}{R_{xx}} . \quad (2.35)$$

<sup>5</sup>Dies ist natürlich nur möglich, wenn zwischen zwei Peaks die Zustandsdichte nicht ganz auf Null abfällt.

<sup>6</sup>Die Fermi-Energie wird hier zur Vereinfachung als konstant angenommen, was eigentlich nicht der Fall ist (siehe Abbildung 2.8).

Zwischen dem spezifischen Längswiderstand  $\rho_{xx}$  und dem Längswiderstand  $R_{xx}$  gilt also die Beziehung

$$\rho_{xx} = R_{xx} \cdot \frac{b}{l} . \quad (2.36)$$

Für den spezifischen Hall-Widerstand  $\rho_{xy}$  und den Hall-Widerstand  $R_{xy}$  gilt

$$\rho_{xy} = R_{xy} . \quad (2.37)$$

Für ein isotropes 2DES ist

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} &= -\sigma_{yx} , \end{aligned}$$

also:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} . \quad (2.38)$$

Mit der Beziehung für den spezifischen Widerstand

$$\rho = \sigma^{-1} \quad (2.39)$$

folgt für die Einzelkomponenten des spezifischen Längswiderstandes:

$$\begin{aligned} \rho_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \\ &= \rho_{yy} . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Eine ausführliche Herleitung der Schubnikov-de Haas-Formel, also für den spezifischen Widerstand als Funktion der Temperatur und des  $B$ -Feldes, ist außerordentlich kompliziert und umfangreich und geht daher über den Rahmen dieser Arbeit hinaus (siehe z. B. [And74, And82]).

Einer der letzten und sicherlich besten Artikel über den SdH-Effekt in zweidimensionalen Elektronensystemen wurde 1986 von Akira Ishihara und Ludvig Smrcka [Smr86] veröffentlicht. Für die spezifische Längsleitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  gilt nach [Smr86] unter Vernachlässigung der Spin-Aufspaltung für kleine Magnetfelder:

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau_q^2} \left( 1 + \frac{\omega_c^2 \tau_q^2}{1 + \omega_c^2 \tau_q^2} \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right) , \quad (2.41)$$

mit

$$\frac{\Delta\rho(T)}{\rho_0} = 4 \sum_{i=1}^{\infty} e^{\frac{-i\pi}{\omega_c \tau_q}} \frac{2i\pi^2 \frac{k_B T}{\hbar \omega_c}}{\sinh\left(2i\pi^2 \frac{k_B T}{\hbar \omega_c}\right)} \cos\left(\frac{2i\pi E_F}{\hbar \omega_c} - i\pi\right) . \quad (2.42)$$

Die mit 0 indizierten Werte gelten dabei für  $B = 0$ , und mit  $\omega_c = \frac{eB}{m^*}$  beschreibt Formel 2.42 die Oszillation des auf  $\rho_0$  normierten Widerstandes als Funktion von  $B$  und  $T$ .

Abbildung 2.4 zeigt die Schubnikov-de Haas-Oszillationen im Längswiderstand eines 2DES. Um die charakteristischen Größen  $E_F$  und  $\tau_q$  zu bestimmen, wurden die gemessenen Werte mit

der Theriefunktion aus Gleichung 2.42 mit einer nichtlinearen Regressionsmethode [Sch01] angepaßt<sup>7</sup>. Die Fermi-Energie beträgt demnach  $E_F = 7.25$  meV und die Quantenstreuzeit  $\tau_q = 1.8 \cdot 10^{-12}$  s, was nach Gleichung 2.29 einer Niveaubreite von  $\Gamma = 190$   $\mu$ eV oder einer Dingle-Temperatur von  $T_D = 0.7$  K entspricht.

Wichtiger ist jedoch die Kenntnis der Ladungsträgerkonzentration  $n$ . Diese beträgt mit der effektiven Elektronenmasse in GaAs von  $m^* = 0.067 m_0$  [Sch01] nach (2.12)  $n = 2.05 \cdot 10^{11}$  cm<sup>-2</sup>.

Ein weiterer wichtiger Parameter zur Charakterisierung einer Probe ist die Elektronenbeweglichkeit  $\mu$ . Die Leitfähigkeit eines 2DES ohne anliegendem Magnetfeld  $\sigma_0$  wird in der Drude-Theorie durch die Beziehung

$$\sigma_0 = e \cdot n \cdot \mu \quad (2.43)$$

beschrieben. Ist  $R_0$  der Probenwiderstand bei  $B = 0$ , dann erhält man die Beweglichkeit aus

$$\mu = \frac{1}{n \cdot e \cdot R_0} \frac{l}{b}. \quad (2.44)$$

$\frac{l}{b}$  ist das Verhältnis von Länge zur Breite der verwendeten Probe. Die Probe, mit der die Messung aus Abbildung 2.4 durchgeführt wurde, hat mit  $R_0 \approx 115$   $\Omega$  und  $\frac{l}{b} = 1$  demnach eine Elektronenbeweglichkeit von  $\mu \approx 260000$   $\frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$ .

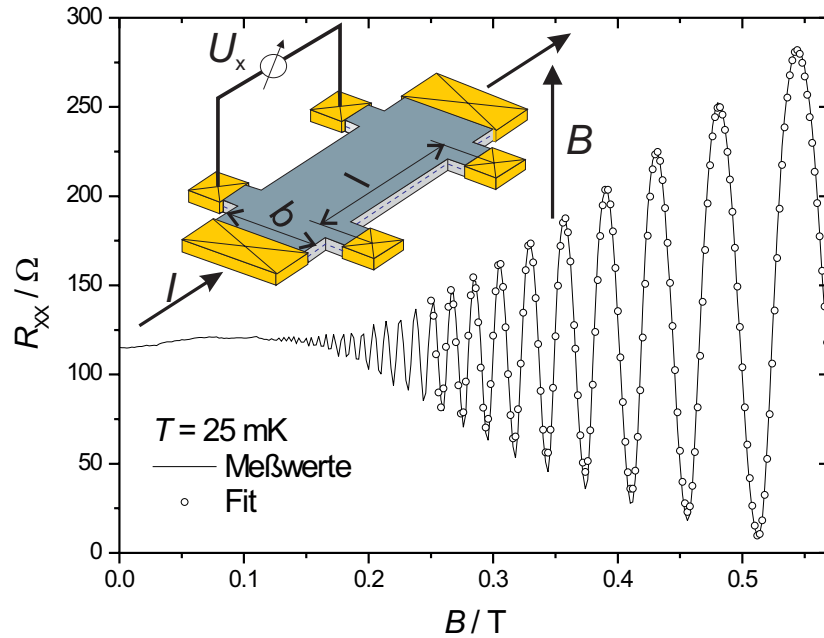


Abbildung 2.4: Schubnikov-de Haas-Oszillationen im Magnetowiderstand eines 2DES. Die Punkte sind angepaßte Daten nach Gleichung 2.42.

<sup>7</sup>Die Nichtparabolizität des Leitungsbandes wurde dabei vernachlässigt.

## 2.4 Quanten-Hall-Effekt

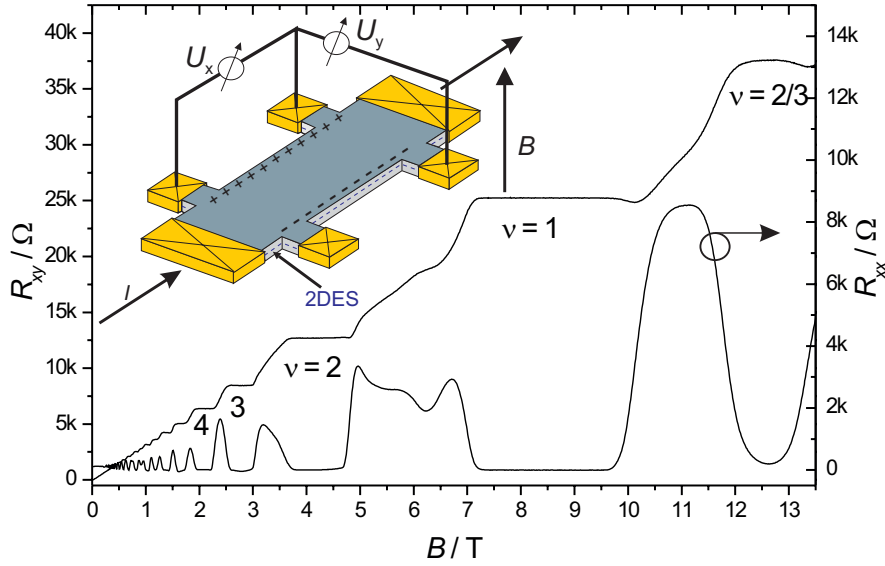


Abbildung 2.5: Längswiderstand  $R_{xx} = \frac{U_x}{I}$  und Hall-Widerstand  $R_{xy} = \frac{U_y}{I}$  eines 2DES bei einer Temperatur von  $T=25$  mK. Im Bereich ganzzahliger Füllfaktoren  $\nu=1,2,\dots$  bleibt der Hall-Widerstand über breite Magnetfeldintervalle auf den quantisierten Werten  $R_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}$ , während gleichzeitig der Längswiderstand unmeßbar klein wird.

Abbildung 2.5 zeigt Längs- und Hall-Widerstand ( $R_{xx} = U_x/I$ ,  $R_{xy} = U_y/I$ ) des 2DES aus Abbildung 2.4 bei sehr hohen Magnetfeldern. Um ganzzahlige Füllfaktoren herum verschwindet der Längswiderstand, und der Hall-Widerstand  $R_{xy}$  bleibt auf Plateaus mit Werten, wie sie im Einelektronenbild nur bei ganzzahligen Füllfaktoren zu erwarten ist:

$$R_{xy}(\nu) = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (2.45)$$

$$= \frac{1}{\nu} R_K. \quad (2.46)$$

$R_K = 25.812807$  kΩ [Jec01] ist die nach dem Entdecker des *Quanten-Hall-Effekts* benannte *von Klitzing-Konstante*. Besonders für metrologische Staatsinstitute, wie die *Physikalisch-Technische Bundesanstalt* in Braunschweig, ist dieser Effekt von großer Bedeutung. Die quantisierten Widerstandswerte hängen nur von den Naturkonstanten  $e$  und  $h$  und der Tatsache ab, daß an einem zwei-dimensionalen Elektronensystem gemessen wird. Dabei ist es egal, in welchem Materialsystem dieses realisiert wird. Durch weltweite Vergleichsmessungen wurde eine relative Unsicherheit in  $R_K$  von wenigen  $10^{-10}$  ermittelt [Bra97].

Die wichtigste Tatsache zur Erklärung der Plateaus ist sicherlich das Auftreten lokalisierter und delokalisierter Zustände innerhalb des 2DES. In einer Entfernung von etwa  $d_s = 40$  nm zum 2DES



(vgl. Abbildung 2.1) befindet sich eine Schicht mit Dotieratomen. Jedes ionisierte Donatoratom sorgt für ein langreichweitiges Coulomb-Feld, welches vom 2DES abgeschirmt wird. Das 2DES verhält sich metallisch, und die Abschirmeigenschaften resultieren aus der Fähigkeit, Ladungsträger innerhalb der Schicht umzuordnen. Das 2DES wird daher als *kompressibel* bezeichnet. Aus den räumlichen Potentialfluktuationen der geladenen Donatoratome resultieren Fluktuationen in der Ladungsträgerkonzentration. Die lokale Ladungsträgerkonzentration  $n_l$  entspricht nicht mehr der globalen ( $n$ ). Nach [Chk93] berechnet sich die mittlere quadratische Abweichung der Ladungsträgerkonzentration zu  $\delta n_l = \frac{\sqrt{n/8\pi}}{d_s}$ . Bei  $n = 2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  entspricht das einer lokalen Änderung um ca. 11 % zum globalen Wert.

Mit angelegtem Magnetfeld bedeutet dies natürlich, daß auch die Energien der Landau-Niveaus um diesen Wert schwanken. Mit Magnetfeld erwartet man metallisches Abschirmverhalten nur, wenn die Fermi-Energie gerade auf einem Landau-Niveau liegt, also bei halbzahligen Füllfaktoren. Ist das Magnetfeld jetzt so eingestellt, daß der Füllfaktor gerade zwischen halbzahligen und ganzzahligen liegt (in den Randbereichen der Widerstands-Plateaus), so wird es drei Arten von Zuständen an der Fermi-Energie innerhalb des 2DES geben (siehe Abbildung 2.6):

1. *ausgedehnte kompressible Zustände*, die durch die gesamte Probe laufen,
2. *lokalisierte kompressible Zustände*, die in eine Matrix aus inkompressiblem 2DES eingebettet sind und
3. *inkompressible Zustände*.

Ein inkompressibles 2DES verhält sich bezüglich seiner Abschirmeigenschaften wie ein Isolator. Elektrische Felder werden nicht abgeschirmt, was daraus resultiert, daß sich die Ladungsträger nicht umverteilen können. Dieser Zustand dominiert im Bereich ganzzahliger Füllfaktoren.

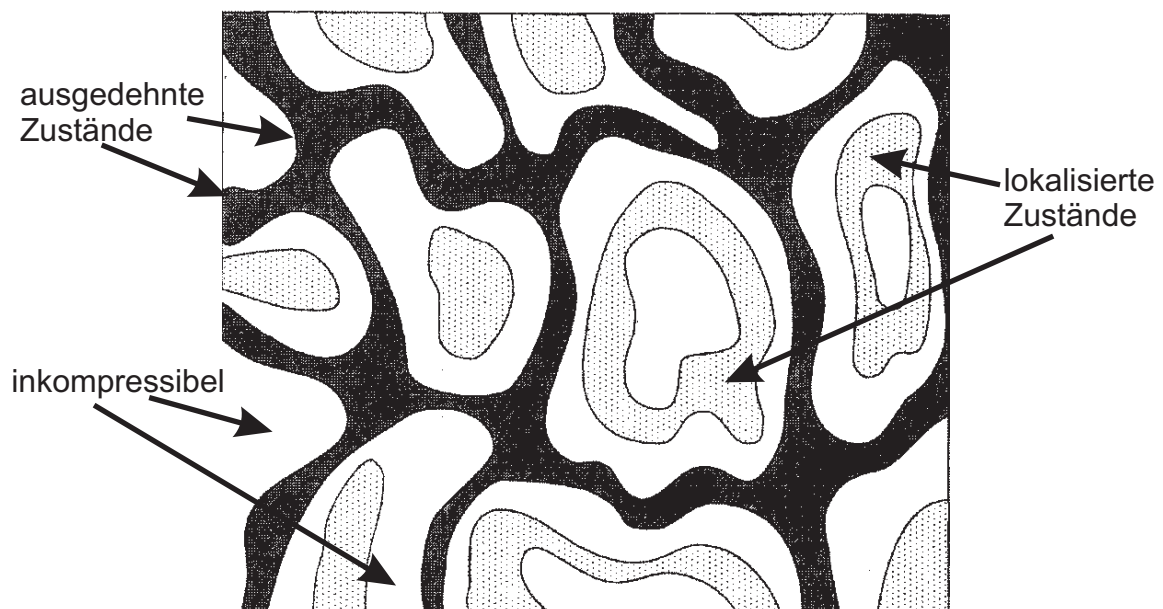


Abbildung 2.6: Auswirkung der Schwankungen in der Ladungsträgerkonzentration auf ein 2DES bei QHE-Bedingungen nach [Chk93]. Im Bereich ganzzahliger Füllfaktoren treten ausgedehnte kompressible Zustände (schwarz), inkompressible Zustände (weiß) und lokalisierte kompressible Zustände auf.

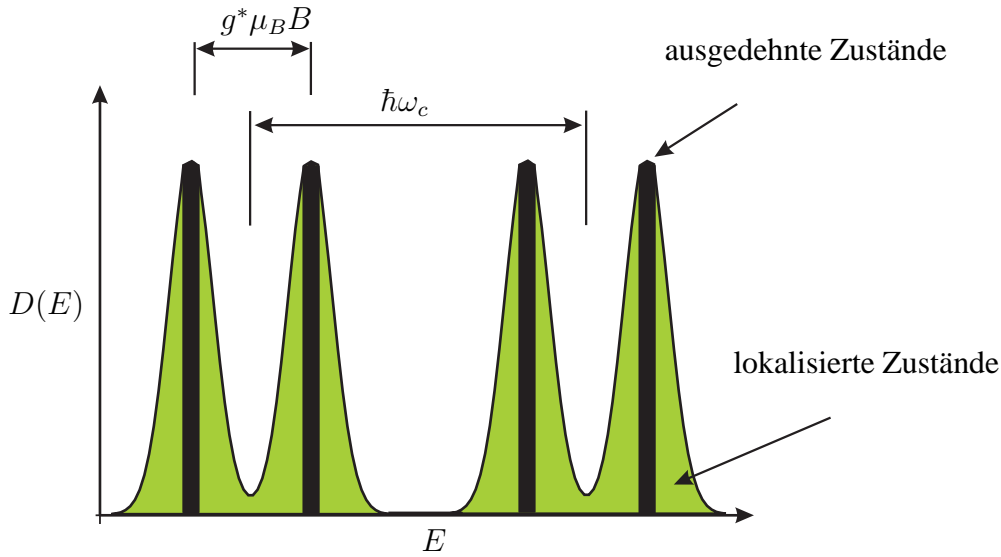


Abbildung 2.7: Zustandsdichte eines 2DES mit nicht homogener Ladungsträgerkonzentration.

Die Peaks der Zustandsdichte (vgl. Abb. 2.3) sehen in diesem Bild dann so aus, daß ausgedehnte Zustände nur in ihren Zentrum existieren. Die restlichen Zustände sind demnach lokalisiert.

Für kleine Magnetfelder wurde bislang die Fermi-Energie als konstant angesehen. Aufgrund der folgenden Überlegung ist diese Näherung für größere Felder nicht mehr zulässig.

Die Landau-Niveaus haben einen Abstand von  $\Delta E = \hbar \omega_c$  (bzw.  $g^* \mu_B B$  für Spin-aufgespaltene Zustände), beginnend bei  $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_c$  oberhalb der Lage des ersten Subbandes auf der Energieskala. Besetzt sind die Landau-Niveaus bis zur Fermi-Energie  $E_F$ . Wenn man nun von einem Magnetfeld  $B_N$  aus das Magnetfeld erhöht, vergrößert sich der Abstand der Landau-Niveaus. Liegt bei  $B = B_N$  das  $N$ -te Landau-Niveau gerade auf Höhe der Fermi-Energie und man vergrößert  $B$  weiter, so kann es seine Elektronen nicht auf einmal an tiefere Landau-Niveaus abgeben, da ihr Entartungsgrad  $n_L$  nur linear mit  $B$  ansteigt. Das bedeutet, daß die Fermi-Energie so lange mit dem  $N$ -ten Landau-Niveau ansteigen muß, bis der Entartungsgrad ausreicht, um alle Ladungsträger auf die  $N - 1$  tieferen Landau-Niveaus zu verteilen. Die Fermi-Energie macht also bei Magnetfeldern, welche ganzzahligen Füllfaktoren entsprechen einen scharfen Sprung. Die Schärfe dieses Sprunges hängt von der Verbreiterung der Landau-Niveaus ab. Abbildung 2.8 skizziert dieses Verhalten.

Nur um halbzahlige Füllfaktoren liegt die Fermi-Energie in einem Energieintervall, in welchem ausgedehnte Zustände existieren. Das 2DES verhält sich in diesem Fall wie ein Metall, es gibt Streuung und damit auch einen elektrischen Längswiderstand.

Für andere Magnetfelder - im Bereich der Widerstandsplateaus - liegt die Fermi-Energie im Bereich lokalisierter Zustände, und der spezifische elektrische Widerstand verschwindet ( $\rho_{xx} = 0$ ). Gleichzeitig muß aber auch  $\sigma_{xx} = 0$  sein (die Ladungsträger sind schließlich lokalisiert...), und trotzdem fließt ein Strom. Dies ist verwunderlich, aber möglich, wenn der Strom senkrecht zum elektrischen Feld durch ausgedehnte Zustände unterhalb der Fermi-Energie fließt. Es gilt also in diesem Fall:  $\sigma_{xx} = 0, \sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$ . Dieses Modell zur Interpretation des Quanten-Hall-Effekts wird üblicherweise als *Lokalisierungsmodell* bezeichnet.

Eine andere Erklärung, die häufig in Lehrbüchern (wie z. B. [Dav98]) gebracht wird, liefert das Randkanalmodell (z. B. [Hau93]). In diesem Modell tragen nur ausgedehnte Zustände in der

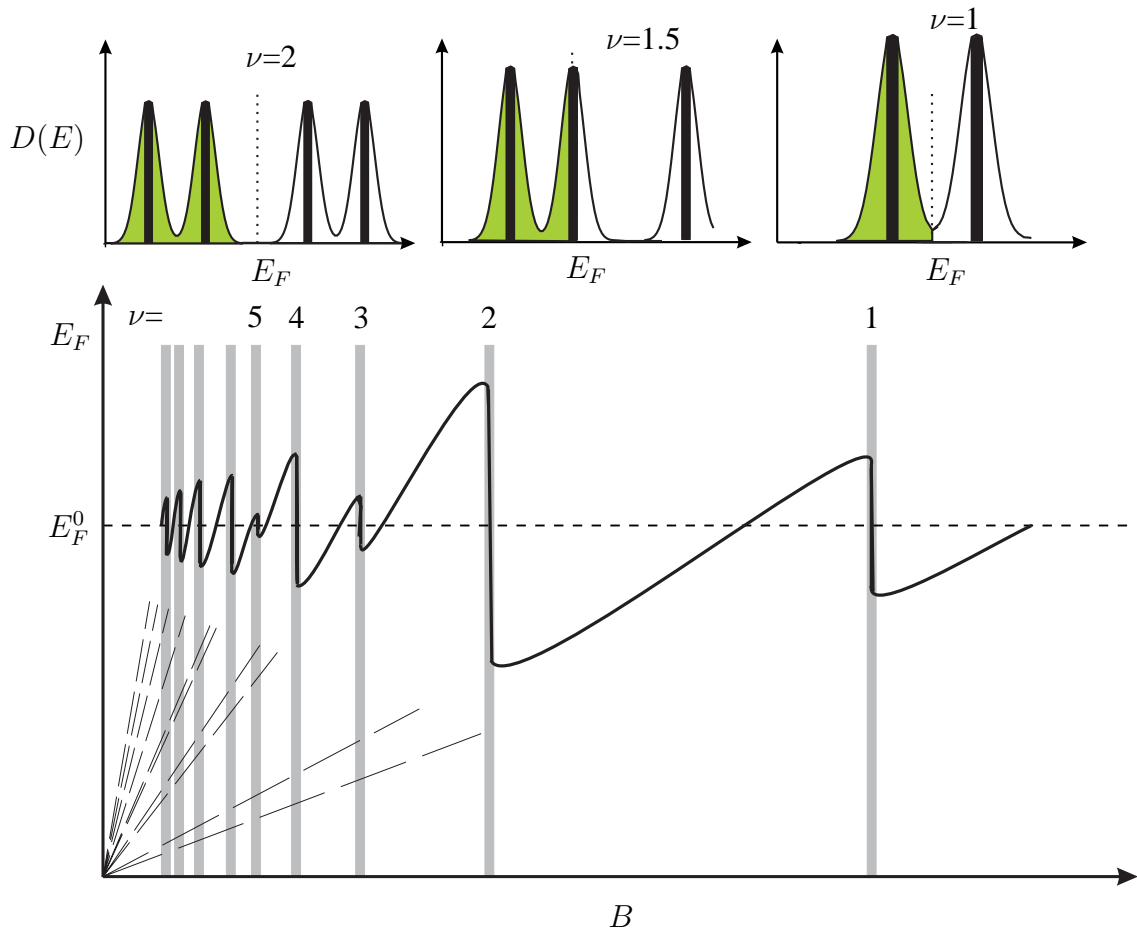


Abbildung 2.8: Oszillation des Fermi-Niveaus mit dem Magnetfeld.

Nähe der Fermi-Energie zum Ladungstransport bei.

Der Probenrand wird durch ein parabolisches Einschlußpotential [Hal82, But86, But88] beschrieben, welches zur Folge hat, daß die Ladungsträgerkonzentration über einen sehr schmalen Bereich - ca.  $0.5 \mu\text{m}$ , wie spätere Messungen zeigen werden - auf Null abfällt. Existiert im Innern der Probe gerade ein Füllfaktor  $\nu$ , so durchläuft der Rand gemäß Gleichung 2.27

$$\nu_l = \frac{h}{e} \cdot \frac{n_l}{B}$$

alle niedrigeren Füllfaktoren. Es bilden sich abwechselnd inkompressible und kompressible Streifen. Bei ganzzahligem Füllfaktor  $\nu$  gibt es demnach  $\nu$  kompressible Randstreifen, räumlich getrennt durch  $\nu - 1$  inkompressible Randstreifen. Aufgrund des Gradienten des Einschlußpotentials und des anliegenden Magnetfeldes kommt es in diesem Bild zu Randströmen in den kompressiblen Randstreifen, die an gegenüberliegenden Rändern der Probe in die entgegengesetzte Richtung fließen und sich somit kompensieren.

Eindimensionale Kanäle haben eine sehr interessante Eigenschaft, sie können einen Strom ballistisch, d. h. dissipationsfrei tragen. Die gemessenen Widerstände solcher Quantendrähte, die meistens als Quanten-Punkt-Kontakte realisiert werden, zeigen quantisierte Widerstände [Wee88,

Wee88a, Nix91]. (Der Spannungsabfall ist im Übergangsbereich in und aus dem Draht zu suchen.) Die Leitfähigkeit eines solchen Quanten-Punkt-Kontaktes im Magnetfeld quantisiert sich in ganzzahlige Vielfache von  $e^2/h$ , abhängig davon, wie viele magnetoelektrische Subbänder des 1D-Kanals besetzt sind [Wee88a]:

$$\sigma_{1D} = \sum_i^{N_c} \frac{e^2}{h} \quad (2.47)$$

$$= N_c \frac{e^2}{h} . \quad (2.48)$$

$N_c$  ist das höchste besetzte Subband.

Abbildung 2.9 skizziert den Rand eines 2DES, wie man ihn sich nach [Chk92] vorstellt. (Der Elektronenspin wurde nicht berücksichtigt.) Der Füllfaktor ist halbzahlig,  $\nu = i + 1/2$ , und das gesamte Innere der Probe ist kompressibel und kann zur Leitfähigkeit beitragen.  $R_{xx}$  zeigt ein lokales Maximum. Erhöht man jetzt das Magnetfeld, liegt irgendwann die Fermi-Energie im Innern des 2DES nicht mehr im Bereich ausgedehnter Zustände. Das Innere der Probe kann somit nicht zum Stromfluß beitragen. Am Rand verbleiben aber  $i$  kompressible Randstreifen, durch die ein Strom fließen kann. Der Spannungsabfall beträgt nach Gleichung (2.47)  $U = \frac{1}{i} \frac{h}{e^2} \cdot I$ , der Strom  $I$  fließt zu gleichen Anteilen durch die ( $i$ ) kompressiblen Randkanäle. An den Spannungskontakten auf jeweils einer Seite der Probe fällt keine Spannung ab, wenn die Ladungsträger rückstreuungsfrei durch die Randkanäle fließen. Der transversale Widerstand  $R_{xy}$  bleibt selbst unter Einbeziehung von Streuung und Berücksichtigung der Kontakte auf dem quantisierten Wert  $R_{xy} = \frac{1}{i} \frac{h}{e^2}$ , solange die Rückstreuung von einem Probenrand zum anderen über den inneren Bereich der Probe effektiv

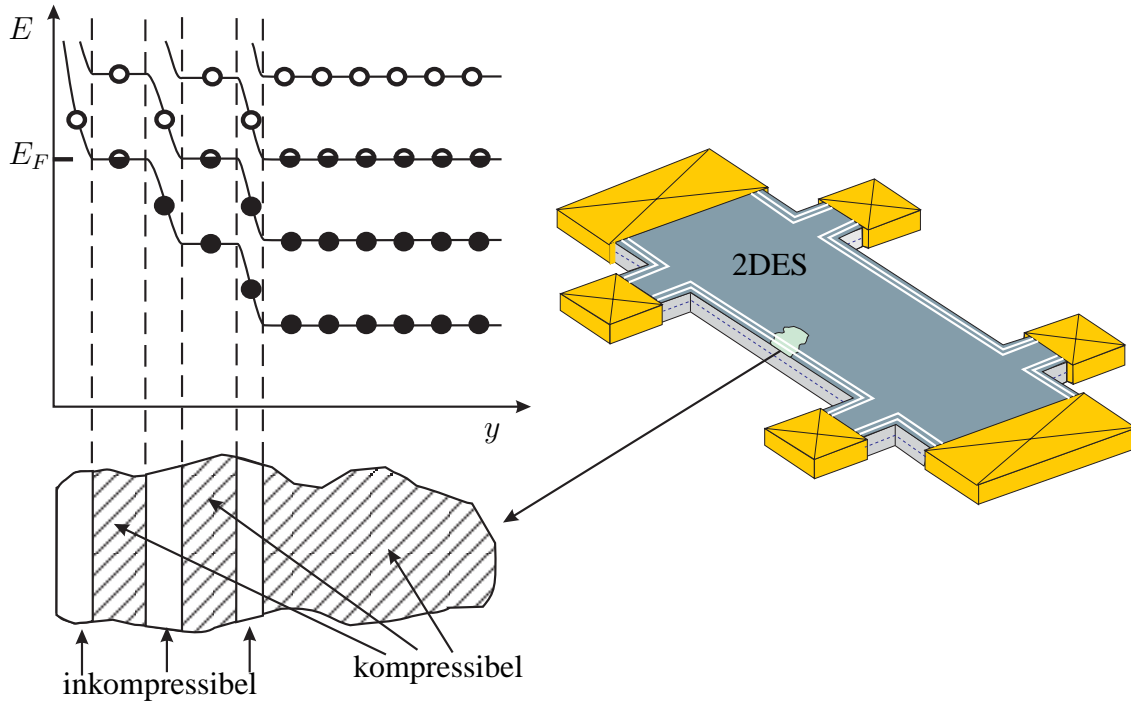


Abbildung 2.9: Modell der Verarmungszone am Rande eines 2DES nach [Chk92].

unterdrückt wird [But88].

Auch wenn dieses Modell sehr plausibel und einleuchtend erscheint, so sind es vor allem die hohen *Breakdown-Ströme*, die gegen dieses Modell sprechen. Die kritischen Ströme, bis zu denen Widerstandsplateaus auftreten, können in mehrere hundert Mikrometer breiten Proben problemlos  $100\ \mu\text{A}$  überschreiten. Typische kritische Stromdichten liegen bei  $J_c = 1\ \frac{\text{A}}{\text{m}}$  [Nach99]. Messungen an Randzuständen mit und ohne Stromfluß werden später in dieser Arbeit diskutiert.



# Kapitel 3

## Der Einzelektron-Transistor

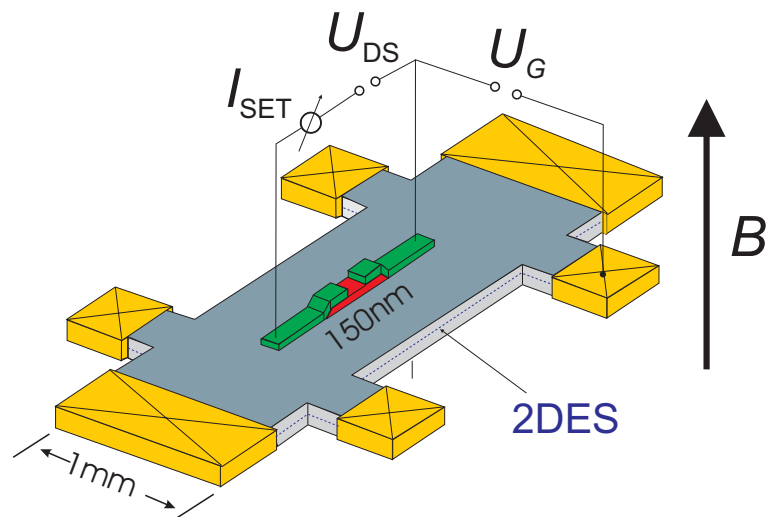


Abbildung 3.1: Skizze der Meßanordnung (nicht maßstabsgetreu).

In den folgenden Experimenten sollen elektrische Potentialänderungen auf einem Hall-Barren mit hoher Empfindlichkeit und Ortsauflösung gemessen werden. Ein Einzelektron-Transistor (Single-Electron-Transistor, kurz SET) ist das empfindlichste bekannte Elektrometer, welches von Natur aus sehr klein ist und nur bei extrem tiefen Temperaturen funktioniert. Somit ist der SET quasi als Meßsonde für diese Anwendung prädestiniert. Abbildung 3.1 verdeutlicht die Dimensionen der Meßanordnung, auf einem 1 mm breiten Hall-Barren befindet sich ein 150 nm großer SET.

Diese Idee ist nicht neu. Bereits 1997 verwendeten Yoo *et al.* [Yoo97] einen SET auf einer Glasfaserspitze, um elektrische Felder und Ladungen in einer  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Heterostruktur abzubilden. Erste Bilder eines 2DES im Quanten-Hall-Regime folgten dann 1999 von Yacoby *et al.* [Yac99]. Einer der wenigen Nachteile dieses bildgebenden Verfahrens ist, daß man während einer Messung auf das Signal *eines* Transistors beschränkt bleibt und somit keine Korrelationseffekte zwischen einzelnen Orten gemessen werden können.

In dieser Arbeit werden die SETs direkt auf die Oberfläche einer Heterostruktur gedampft [Wei97, Wei98, Wei98a, Wei98b, Ila00, Fuj01], deren 2DES sich weniger als 100 nm unterhalb

der Oberfläche befindet. Vorteile dieses Verfahrens sind eine bessere Ankopplung der SETs an das 2DES, sowie die Möglichkeit, mit mehreren SETs gleichzeitig messen zu können.

In den folgenden Abschnitten wird zuerst die Physik der Coulomb-Blockade und des Einzelektronentunnels erläutert (Als Leitfaden diente dazu die Habilitationsschrift von Jürgen Weis [Wei02].), auf die Herstellung der SETs wird in Kapitel 4 eingegangen.

### 3.1 Coulomb-Blockade

Abbildung 3.2 zeigt eine metallische Insel, die mit einer Kapazität  $C_\Sigma$  an ihre Umgebung, zwei metallische Elektroden, die im folgenden als *Source*- und *Drain*-Elektrode bezeichnet werden, gekoppelt ist. Damit die elektrische Neutralität des Systems gewährleistet ist, kann man sich dieses z. B. dadurch entstanden denken, daß die Insel durch zwei Schnitte aus einem Metallring getrennt wird. In Abbildung 3.2 a) sind dementsprechend Elektronen auf der Insel und auf den Elektroden auf dem gleichen elektrochemischen Potential. In Abbildung 3.2 b) wurde die Insel mit einem

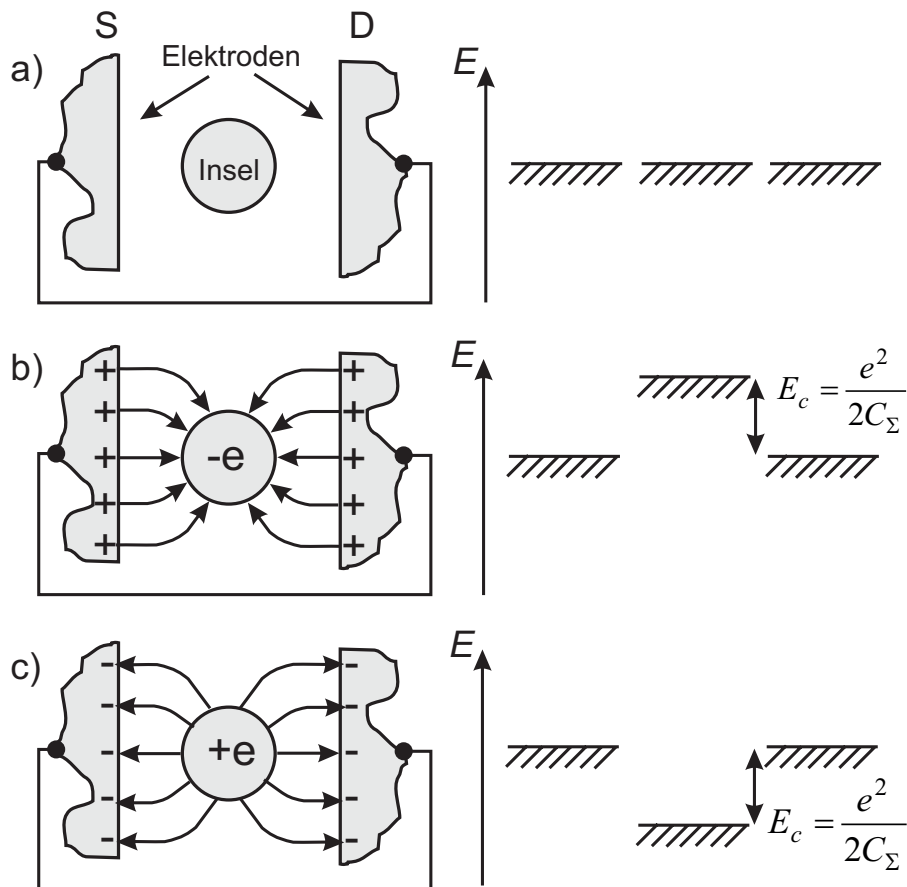


Abbildung 3.2: Skizzen (links) einer metallischen Insel, die kapazitiv an zwei metallischen Elektroden (**Source** und **Drain**) gekoppelt ist. Die Energiediagramme (rechts) zeigen das elektrochemische Potential der Elektronen auf den Elektroden (links & rechts) und der Insel (mitte) für die Fälle: a) Die Insel und die Elektroden sind elektrisch neutral. b) Die Insel wurde mit einem Elektron der Elektroden geladen. c) Die Elektroden wurden mit einem Elektron der Insel geladen.



Elektron aus den Zuleitungen geladen. Die dazu benötigte Energie beträgt

$$E_c = \frac{e^2}{2C_\Sigma} . \quad (3.1)$$

Dieselbe Energie ist für den umgekehrten Prozeß in Abbildung 3.2 c) notwendig.

Legt man nun eine Spannungsquelle zwischen Source- und Drain-Elektrode an, so verteilt sich die angelegte Spannung  $U_{DS}$  auf die beiden Kondensatoren  $C_S$  und  $C_D$ . Des weiteren nehmen wir an, daß beide Kondensatoren derartig dünne dielektrische Schichten haben, daß Tunnelprozesse über die dielektrische Schicht möglich sind. In Abbildung 3.3 a,b) ist das Energiediagramm für die Situation dargestellt, daß  $eU_{DS} < \frac{e^2}{C_\Sigma}$  ist. Die Ladungsenergie für einen Tunnelprozeß von der

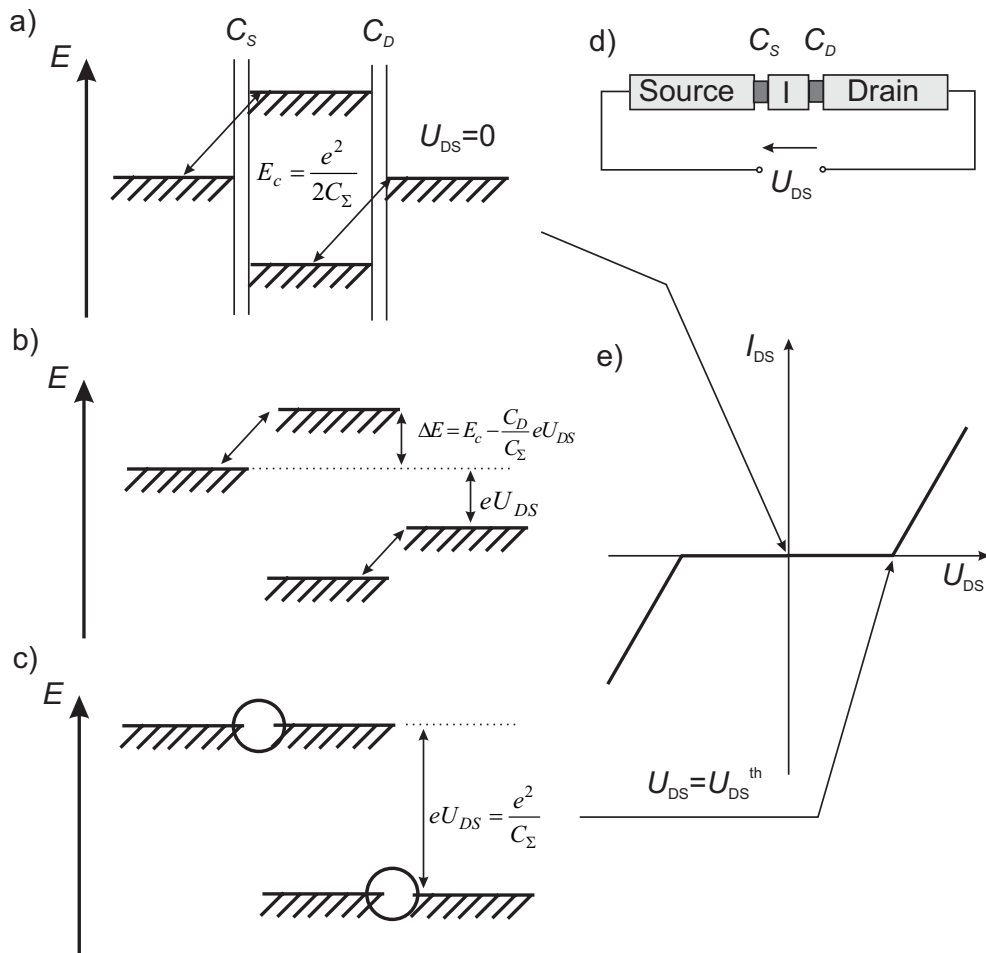


Abbildung 3.3: links: Energiediagramme wie in Abbildung 3.2, mit dem Unterschied, daß in die Verbindung zwischen den Elektroden Source und Drain eine Spannungsquelle mit der Spannung  $U_{DS}$  zwischengeschaltet wurde (d). In (a) ist  $U_{DS} = 0$ , und die zum Be- und Entladen der Insel mit einem Elektron benötigte Energie beträgt  $E_c$ . In (b) ist  $0 < eU_{DS} < \frac{e^2}{C_\Sigma}$ , die zum Be- und Entladen benötigte Energie reduziert sich auf  $\Delta E = E_c - e \frac{C_{D,S}}{C_\Sigma} U_{DS}$ . Im Fall (c) ist  $eU_{DS} = \frac{e^2}{C_\Sigma}$ , die zum Be- und Entladen benötigte Energie reduziert sich auf Null. e) Kennlinie dieses Bauelements: Nur wenn  $|eU_{DS}| > \frac{e^2}{C_\Sigma}$  ist, kann ein Strom fließen. Das Phänomen, daß in einem Bereich  $\Delta U_{DS}$  der Stromtransport unterdrückt ist, wird als Coulomb-Blockade bezeichnet.

Source-Elektrode auf die Insel verringert sich auf den Betrag

$$\Delta E_{S \rightarrow I} = E_C - e \frac{C_D}{C_\Sigma} U_{DS} . \quad (3.2)$$

Gleichzeitig verringert sich auch die Ladungsenergie für ein von der Insel auf die Drain-Elektrode tunnelndes Elektron auf

$$\Delta E_{I \rightarrow D} = E_C - e \frac{C_S}{C_\Sigma} U_{DS} . \quad (3.3)$$

Nimmt man der Einfachheit halber an, daß  $C_S$  und  $C_D$  identisch sind, so ergibt sich eine Schwellspannung  $U_{DS}^{th}$  für einen Tunnelstrom von

$$U_{DS}^{th} = \frac{e}{C_\Sigma} . \quad (3.4)$$

Für Spannungen  $U_{DS} < U_{DS}^{th}$  kann dementsprechend kein Tunnelstrom fließen, dieser Effekt wird als *Coulomb-Blockade* bezeichnet.

Zur Zeit lassen sich in der PTB mit Elektronenstrahl-Lithographie Strukturen kleiner als 100 nm reproduzierbar herstellen. So könnte eine Tunnelbarriere z. B. aus  $100 \times 100 \text{ nm}^2$   $\text{AlO}_x$  mit einer Dicke von 1 nm bestehen. Die Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  von  $\text{AlO}_x$  kann man mit 10 abschätzen. Als Kapazität einer Barriere ergibt sich dann

$$C_{S,D} = \frac{10\epsilon_0 10^{-14} \text{ m}^2}{10^{-9} \text{ m}} \approx 10^{-15} \text{ F} = 1 \text{ fF} . \quad (3.5)$$

Die Ladungsenergie  $E_c = \frac{e^2}{2C_\Sigma} \approx \frac{e^2}{2(C_S+C_D)}$  beträgt dann etwa  $40 \text{ } \mu\text{eV}$ , was wiederum einer thermischen Elektronenenergie  $k_B T$  bei  $T = 0.465 \text{ K}$  entspricht. Setzt man als Forderung für die Coulomb-Blockade die Bedingung

$$E_c \ll k_B T , \quad (3.6)$$

so kann man diese für Temperaturen unterhalb von  $T \approx 100 \text{ mK}$  erwarten.

## 3.2 Die Einzelelektronen-Box

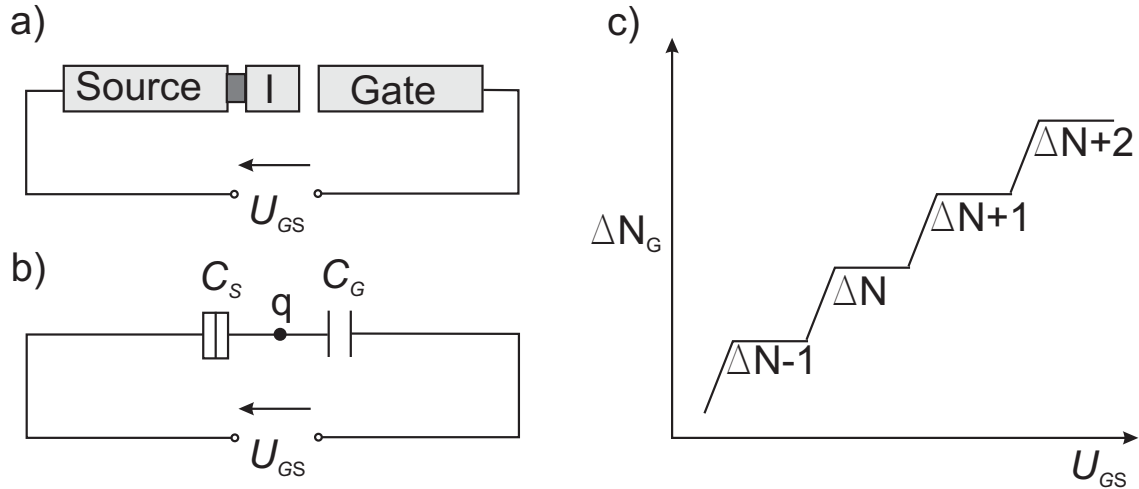


Abbildung 3.4: Die Einzelelektronen-Box: Der Aufbau gleicht dem aus Abbildung 3.3 d), mit dem Unterschied, daß der rechte Kondensator keine Tunnelprozesse erlaubt. Ein Erhöhen der Spannung  $U_{GS}$  verändert die Anzahl der auf der Insel lokalisierten Elektronen in Form einer Stufenfunktion (c).

Eine Modifikation der Struktur aus Abbildung 3.3 ist die sogenannte Einzelelektronen-Box (Abbildung 3.4). Die Insel ist über einen Tunnelkontakt mit der Source-Elektrode verbunden. Der Kontakt zur Gate-Elektrode ist rein kapazitiv und beeinflusst somit das elektrostatische Potential der Elektronen auf der Insel. Das Anlegen einer Gate-Source-Spannung  $U_{GS}$  verändert die elektrostatische Energie  $E_G$  eines Elektrons auf der Insel:

$$\Delta E_G = -e \frac{C_G}{C_\Sigma} U_{GS} . \quad (3.7)$$

Hiermit erniedrigt sich die Energiebarriere für einen Tunnelprozeß eines Elektrons der Source-Elektrode auf

$$\Delta E_{S \rightarrow I} = E_C - e \frac{C_G}{C_\Sigma} U_{GS} . \quad (3.8)$$

Für einen Tunnelprozeß in entgegengesetzter Richtung erhöht sich in gleicher Weise die Energiebarriere auf

$$\Delta E_{I \rightarrow S} = E_C + e \frac{C_G}{C_\Sigma} U_{GS} . \quad (3.9)$$

Die Energiedifferenz zwischen zwei Energieniveaus bleibt unverändert

$$\Delta E_{I \rightarrow S} + \Delta E_{S \rightarrow I} = \frac{e^2}{C_\Sigma} . \quad (3.10)$$

Wählt man  $U_{GS}$  so, daß  $\Delta E_{S \rightarrow I} = 0$  ist ( $U_{GS} = \frac{e}{2C_\Sigma}$ ), kann ein Elektron zwischen Insel und Source-Elektrode hin- und hertunneln. Die Inselladung fluktuiert zwischen  $q = 0$  und  $q = -e$ . Für den entgegengesetzten Fall, daß  $U_{GS} = -\frac{e}{2C_\Sigma}$  ist, fluktuiert die Ladung zwischen  $q = 0$  und  $q = +e$ .

Erhöht man  $U_{GS}$  über  $U_{GS} = \frac{e}{2C_\Sigma}$  hinaus, so wird  $\Delta E_{S \rightarrow I}$  negativ, und die Energie des zusätzlichen Elektrons auf der Insel ist niedriger als die elektrostatische Energie der Elektronen auf der Source-Elektrode. Das Elektron ist jetzt auf der Insel lokalisiert, und die Ladung der Insel beträgt  $q = -e$ .

Ein Beladen der Insel mit  $\Delta N$  Elektronen bedarf einer Energie

$$E_{elst}(\Delta N) = \frac{(-\Delta N e)^2}{2C_\Sigma}, \quad (3.11)$$

das Anlegen einer Gate-Spannung  $U_{GS}$  reduziert diese auf

$$E_{elst}(\Delta N, U_{GS}) = \frac{(-\Delta N e)^2}{2C_\Sigma} - \Delta N e \frac{C_G}{C_\Sigma} U_{GS}. \quad (3.12)$$

Für  $\Delta N = 1$  und  $U_{GS} = 0$  erhält man  $E_{elst} = \frac{e^2}{2C_\Sigma} = E_C$ . Sind bereits  $\Delta N - 1$  Elektronen auf der Insel, so benötigt das  $\Delta N$ te die Energie

$$\begin{aligned} \Delta E_{S \rightarrow I}(\Delta N, U_{GS}) &= E_{elst}(\Delta N, U_{GS}) - E_{elst}(\Delta N - 1, U_{GS}) \\ &= (2\Delta N - 1) \frac{e^2}{2C_\Sigma} - e \frac{C_G}{C_\Sigma} U_{GS} \\ &= 2E_C \left( \Delta N - \frac{1}{2} - \frac{C_G}{e} U_{GS} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Diese Energiedifferenz für einen Tunnelprozeß von der Source-Elektrode auf die Insel ist abhängig von  $\Delta N$  und  $U_{GS}$  entweder positiv oder negativ. Erhöht man die Gate-Spannung von 0 auf  $U_{GS}$ , so werden Elektronen von der Source-Elektrode auf die Insel tunneln, bis Gleichung 3.13 nicht mehr negativ ist. In diesem Fall sind  $\Delta N = \Delta N_G$  Elektronen auf der Insel lokalisiert (vgl. Abbildung 3.4). Es gibt Bereiche, in denen die Anzahl der Elektronen auf der Insel konstant ist und Übergangsbereiche, wo jeweils ein Elektron zwischen der Insel und der Source-Elektrode hin- und hertunnelt. In diesen Übergangsbereichen gilt:  $\Delta E_{S \rightarrow I}(\Delta N, U_{GS}) = 0$  (Gleichung 3.13). Die Periode der Gate-Spannung  $\Delta U_{GS}$ , mit der sich die Anzahl der Elektronen auf der Insel jeweils um *eins* ändert, ist nach Gleichung 3.13 gegeben durch:

$$\Delta U_{GS} = \frac{e}{C_G}. \quad (3.14)$$

### 3.3 Der SET

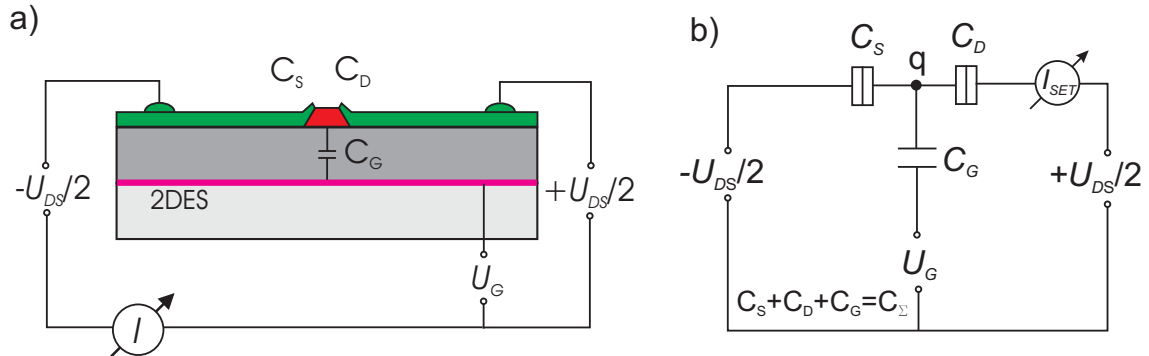
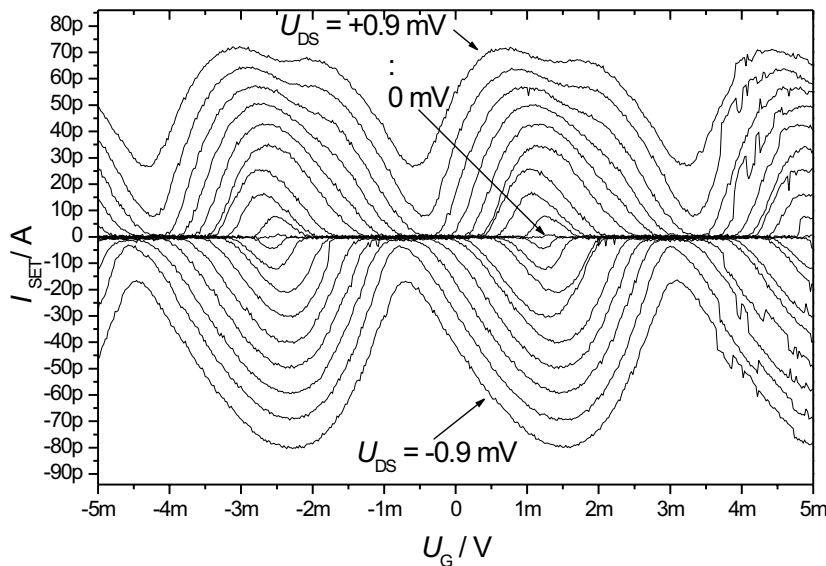


Abbildung 3.5: Ersatzschaltbild eines SETs.

Der Einzelelektron-Transistor besteht aus zwei Tunnelkontakten und einer zusätzlichen Gate-Elektrode (Abbildung 3.5), die bei den in dieser Arbeit verwendeten Transistoren das 2DES einer AlGaAs-Heterostruktur ist. Mit der Gate-Elektrode kann - wie im letzten Abschnitt beschrieben - die elektrostatische Energie der Elektronen auf der Insel variiert werden. Genau wie bei der Einzelelektronen-Box lässt sich auch beim SET ein Energieniveau-Schema erstellen (Abbildung 3.7).

Abbildung 3.6: Coulomb-Blockade-Oszillationen eines Einzelelektronen-Transistors für unterschiedliche Spannungen  $U_{DS}$ . Temperatur während der Messung:  $T = 25 \text{ mK}$ .

In Abbildung 3.7 (1) sind  $U_{DS}$  und  $U_G$  so gewählt, daß  $\Delta E_{S \rightarrow I}(\Delta N + 1)$  und  $\Delta E_{I \rightarrow D}(\Delta N)$  positiv sind. Trotz angelegter Source-Drain-Spannung kann kein Strom fließen, es herrscht Coulomb-Blockade. In Abbildung 3.7 (1a) wurde  $U_{DS}$  so weit erhöht, daß  $\Delta E_{S \rightarrow I}(\Delta N + 1)$  negativ ist, es fließt ein Tunnelstrom.

In Abbildung 3.7 (1b) wurde die Gate-Spannung  $U_G$  so weit verändert, daß  $\Delta E_{I \rightarrow D}(\Delta N)$  negativ ist. Ein Elektron kann die Insel verlassen, indem es zur Drain-Elektrode tunnelt. Jetzt sind nur noch  $\Delta N - 1$  Elektronen auf der Insel und ein neues Elektron kann von der Source-Elektrode auf die Insel tunnelt.

Mit der Gate-Elektrode kann also der Stromfluß durch das Bauelement variiert werden, es handelt sich um einen Transistor. Die Tatsache, daß die Elektronen immer nur nacheinander über die Insel tunnelt können, rechtfertigt den Namen *Einzelelektron-Transistor*.

Abbildung 3.6 zeigt  $I(U_G)$ -Kennlinien für unterschiedliche Spannungen  $U_{DS}$ . Ist  $U_{DS}$  hinreichend klein gewählt, so existieren breite Intervalle in  $U_G$ , in denen ein Stromfluß komplett unterdrückt ist. Für größere  $|U_{DS}|$  schrumpft das Spannungsintervall für eine komplette Coulomb-Blockade immer weiter, bis auch in den Minima ein Strom fließen kann. Trotzdem werden bis zu hohen  $U_{DS}$ -Spannungen immer noch Coulomb-Blockade-Oszillationen beobachtet. Sehr schön zeigt dies auch Abbildung 3.8. Hier sieht man viele  $I(U_{DS})$ -Kennlinien bei unterschiedlichen

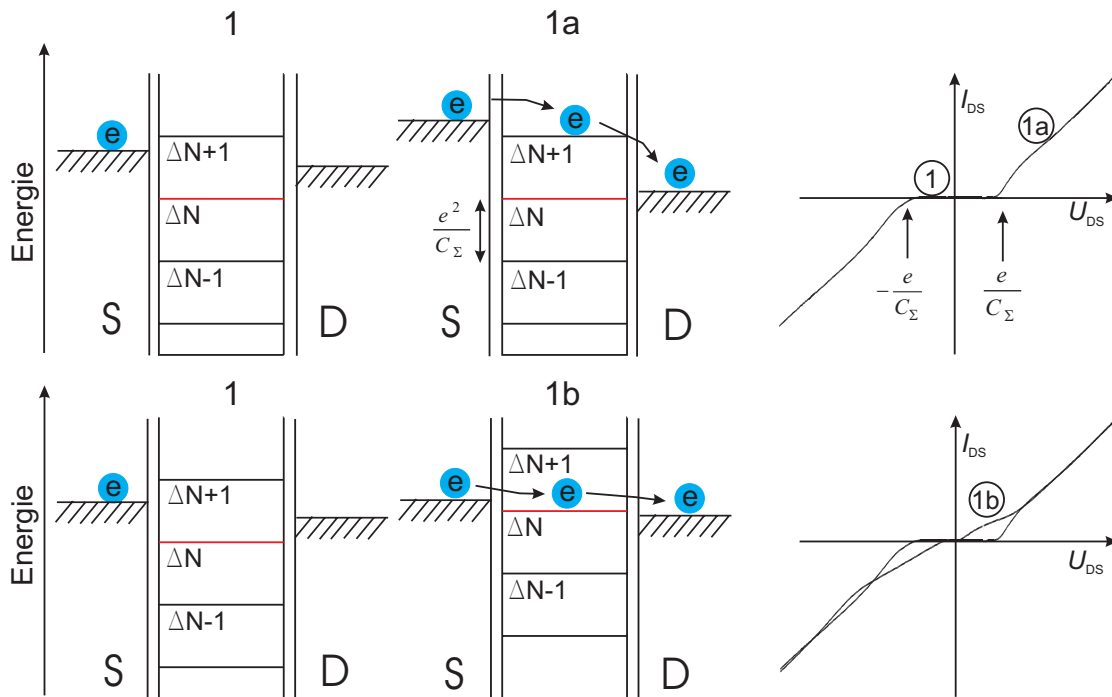


Abbildung 3.7: Energiediagramme (links, mitte) und Kennlinien (rechts) des Einzelelektron-Transistors. In (1) sind  $\Delta N$  Elektronen auf der Insel lokalisiert. Die angelegte Spannung  $U_{DS}$  ist nicht ausreichend, daß eins der  $\Delta N$  Elektronen von der Insel auf die Drain-Elektrode tunnelt, bzw. die Insel mit einem zusätzlichen Elektron der Source-Elektrode geladen werden kann. Erst wenn man (1a) die Spannung  $U_{DS}$  erhöht, wird dies möglich. Die Anzahl der Elektronen auf der Insel fluktuiert dann zwischen  $\Delta N$  und  $\Delta N + 1$ , es fließt ein Strom. In (1b) wurde die Situation aus (1) dahingehend verändert, daß die Gate-Spannung  $U_G$  das elektrostatische Potential der Inselelektronen erhöht hat. Von den  $\Delta N$ -Elektronen auf der Insel kann eins die Insel in Richtung Drain-Elektrode verlassen. Die Anzahl der Elektronen auf der Insel fluktuiert zwischen  $\Delta N$  und  $\Delta N - 1$ , es fließt ein Strom.

Gate-Spannungen  $U_G$ . Man sieht rautenförmige Bereiche, in denen Coulomb-Blockade herrscht. Sie zeigen eine Periodizität in  $U_G$  von  $\Delta U_G = 3.8$  mV.

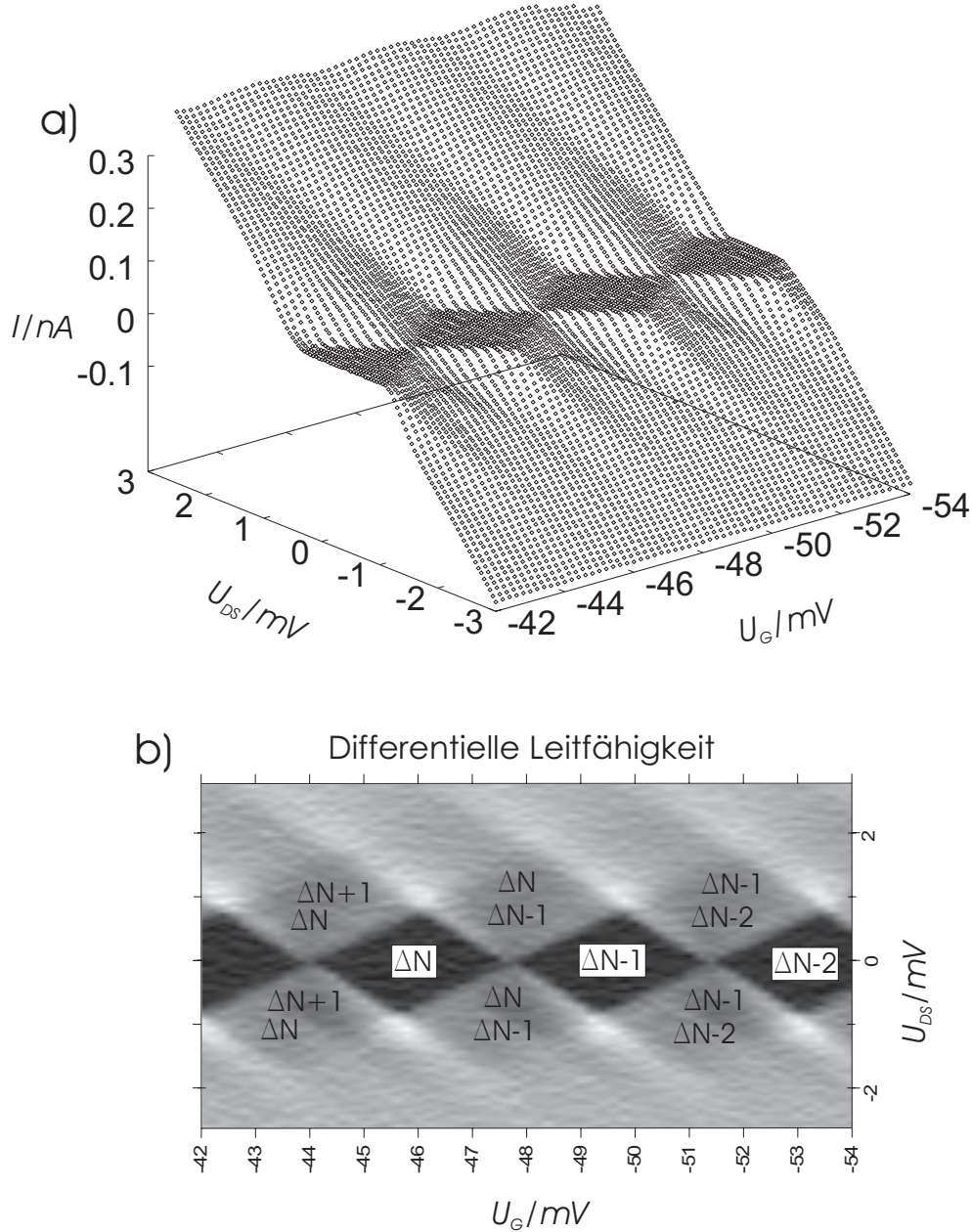


Abbildung 3.8:  $I(U_{DS}, U_G)$ -Kennlinien (a) und die daraus abgeleitete differentielle Leitfähigkeit (b)  $dI/dU_{DS}$  eines Einzelelektron-Transistors. In den Bereichen der Coulomb-Blockade (schwarze Rauten in (b)) ist die Anzahl der Elektronen auf der Insel des Transistors konstant ( $\Delta N$ ,  $\Delta N - 1$ , ...). In den Bereichen, wo ein Strom fließt, variiert sie zwischen  $\Delta N$  und  $\Delta N - 1$ ,  $\Delta N - 1$  und  $\Delta N - 2$ , usw.. Die Messung wurde bei einer Temperatur von  $T=25$  mK durchgeführt.

Mit der Beziehung 3.14 lässt sich hieraus die Gate-Kapazität bestimmen:

$$\begin{aligned} C_G &= \frac{e}{\Delta U_G} \\ &= \frac{e}{3.8 \text{ mV}} \\ &= 42 \text{ aF} . \end{aligned}$$

Die Gesamtkapazität  $C_\Sigma$  erhält man aus der maximalen Schwellspannung  $U_{DS}^{th}$  nach Gleichung 3.4:

$$\begin{aligned} C_\Sigma &= \frac{e}{U_{DS}^{th}} \\ &= \frac{e}{1 \text{ mV}} \\ &= 160 \text{ aF} . \end{aligned}$$

Dies entspricht einer Ladungsenergie  $E_c = \frac{e^2}{2C_\Sigma} = 0.5 \text{ meV}$ , was wiederum einer thermischen Energie  $k_B T$  bei  $T = 5.8 \text{ K}$  entspricht. Der Transistor ist somit für den noch mit  $^4\text{He}$  zugänglichen Temperaturbereich geeignet<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>In späteren Kapiteln dieser Arbeit werden Messungen bei  $T = 1.35 \text{ K}$  gezeigt, die mit diesem Transistor durchgeführt worden sind.



# Kapitel 4

## Probenherstellung und Meßtechnik

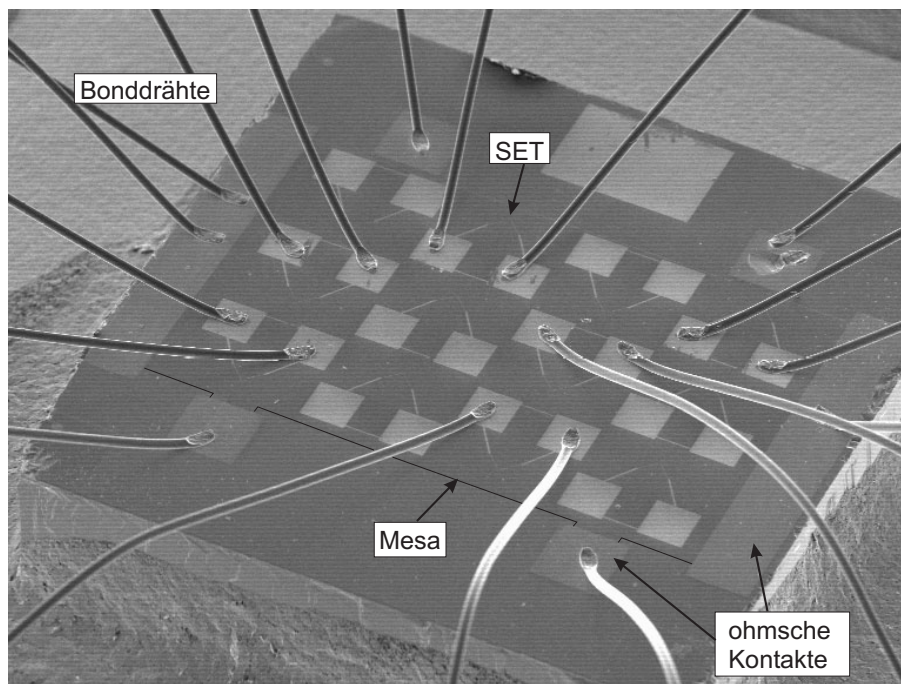


Abbildung 4.1: REM-Aufnahme eines Hall-Barrens, auf dessen Oberfläche 12 SETs aufgedamft wurden.

Der zeitaufwendigste Teil dieser Arbeit war sicherlich die Präparation der Proben, von denen eine exemplarisch in Abbildung 4.1 gezeigt ist. Das Substrat hat eine Größe von  $2 \times 2 \text{ mm}^2$  und ist mit Leitsilber in einem sogenannten Chip-Carrier aufgeklebt. Die elektrischen Kontakte erfolgen über Bonddrähte aus Aluminium. Jeder der 12 SETs auf der Oberfläche des Hall-Barrens ist über zwei dünne Zuleitungen mit zwei  $100 \times 100 \text{ } \mu\text{m}^2$  großen Kontaktflächen verbunden. Diese beiden Kontaktflächen sind zusätzlich noch über eine  $2 \text{ } \mu\text{m}$  dicke Leitung verbunden, die nach dem Bonden durchgekratzt wird. Dies schützt die SETs während des Bondens vor elektrostatischer Zerstörung.

Von großem Vorteil bei der Herstellung der Strukturen war, daß auf die Erfahrung vieler Kollegen zurückgegriffen werden konnte, die ähnliche Prozeßschritte für die Strukturierung ihrer Proben benötigen (z. B. [Ebe01]). Als Ausgangsmaterial für die Hall-Barren standen eigens in der PTB

gewachsene  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Heterostrukturen in ausreichender Menge und Qualität zur Verfügung.

Da die SET-Inseln mit ihren Tunnelkontakten extrem klein sein müssen, ist für die Probenprozessierung die Elektronenstrahl-Lithographie erforderlich. Um auch bei der Strukturierung der Hall-Barren flexibel zu bleiben, wurde die gesamte Probenprozessierung mit Elektronenstrahl-Lithographie durchgeführt, obwohl bei den großen Strukturen, wie z. B. den ohmschen Kontakten, die Auflösung der Photolithographie vollkommen ausreichend gewesen wäre.

Die Probenpräparation kann prinzipiell in vier ähnliche Schritte unterteilt werden:

1. Herstellung der Marker für die folgenden Prozeßschritte,
2. Ätzen einer Mesa, die den Hall-Barren definiert,
3. Präparation der ohmschen Kontakte und
4. die Herstellung der SETs.

## 4.1 Herstellung der Marker

Als erster Prozeßschritt wurde immer ein Satz von Markern hergestellt. Diese sind kleine Quadrate aus Chrom und Gold mit einer Kantenlänge von  $10\text{ }\mu\text{m}$ , die sich in allen vier Ecken der in Abbildung 4.1 gezeigten Probe befinden<sup>1</sup>. An den Markern justieren sich die folgenden Belichtungen im Elektronenstrahlschreiber und gewährleisten eine Strukturüberdeckung mit einer Genauigkeit von  $50\text{ nm}$ . Um Zeit zu sparen, wurden in der Regel auf einem Bruchstück der Größe eines Viertel 3"-Wafers einer ausgewählten Heterostruktur gleichzeitig ca. 100 Hall-Barren parallel hergestellt. Um das Probenstück besser manipulieren zu können, wurde es zu Beginn des Prozesses auf einen 3" großen Silizium-Wafer mit einem Kunstwachs aufgeklebt.

Nach dem Reinigen des Bruchstückes mit Isopropanol wurde zuerst eine Lackschicht PMMA<sup>2</sup> der Firma Allresist (AR-P 671.04 200k) bei  $4000\text{ min}^{-1}$  45 Sekunden lang aufgeschleudert und anschließend 10 Minuten bei einer Temperatur von  $160\text{ }^\circ\text{C}$  auf einer Heizplatte ausgebacken. Darauf folgte eine zweite Lackschicht, ebenfalls PMMA der Firma Allresist (AR-P 671.02 950k), welche auch 45 Sekunden lang mit  $4000\text{ min}^{-1}$  aufgeschleudert und danach 10 Minuten lang bei  $160\text{ }^\circ\text{C}$  ausgebacken wurde.

Danach wurden die Proben in das Elektronenstrahl-Lithographiesystem eingeschleust, und der Schreibvorgang konnte beginnen. Zum Schreiben stehen in der PTB drei unterschiedliche Elektronenstrahldurchmesser zur Verfügung:  $10\text{ nm}$ ,  $50\text{ nm}$  und  $250\text{ nm}$ . Zum Schreiben der mit  $10\times 10\text{ }\mu\text{m}^2$  relativ großen Flächen der Marker reicht es, für den inneren Bereich den  $250\text{ nm}$  Strahl und für den Rand den  $50\text{ nm}$  dicken Strahl zu verwenden. Ein Schreiben mit dem  $10\text{ nm}$  dicken Strahl wäre viel zu zeitaufwendig. Der Grund für die Verwendung zweier Strahlstärken liegt im sogenannten Proximity-Effekt [Kys83]. Leider kommen die den Lack belichtenden Elektronen nicht nur von oben auf den Lack, sondern werden teilweise vom darunterliegenden GaAs-Substrat wieder zurückgestreut. Dies hat zur Folge, daß beim Schreiben mit einer starken Dosis oder einem dicken Strahl auch Material neben den direkt bestrahlten Flächen entwickelt wird. Bei einer Markerfläche wird daher zuerst der innere Bereich mit einem dicken Strahl und einer Dosis von 400

<sup>1</sup>Aufgrund ihrer geringen Größe sieht man sie in Abbildung 4.1 nicht.

<sup>2</sup>Polymethylmethacrylat

$\mu\text{C}/\text{cm}^2$  geschrieben. Danach belichtet der 50 nm dicke Elektronenstrahl den Rand der Fläche mit einer Dosis von  $450 \mu\text{C}/\text{cm}^2$ <sup>3</sup>.

Die Entwicklung der Proben geschah mit dem sogenannten 'Glasgower' Entwickler [Tho98], bestehend aus 74.25 % Isopropanol, 24.75 % 2-Methyl-4-Pentanon (MIBK) und 1 % Ethyl-Methyl-Keton (Butanon). Die Proben wurden dazu 45 Sekunden mit einer Pinzette im Entwickler geschwenkt und danach 15-30 Sekunden in ein Stopfbad aus Isopropanol gelegt.

Der 'Elektronenbeschuß' zerkleinert bei der Belichtung die langen Molekülketten des PMMAs und macht sie so für den Entwickler löslich. Nach dieser Prozedur waren die Proben also immer noch fast komplett mit Lack benetzt. Nur an den Stellen, wo die Marker platziert werden sollten, war die Lackschicht abgelöst. Die Proben wurden jetzt in eine Aufdampfanlage eingebaut, in der 5 nm Chrom als Haftvermittler und anschließend 25 nm Gold aufgedampft wurden.

Ein halbstündiges Bad in fast kochendem Aceton löste dann die Lackschicht mit der darüberliegenden Chrom-Gold-Schicht ab, und nur die Marker blieben zurück (Lift-Off-Prozeß).

## 4.2 Ätzen der Hall-Barren

Im zweiten Präparationsschritt wurden die Hall-Barren hergestellt. Dazu müssen die epitaktisch gewachsenen Schichten, welche nahe der Oberfläche des Substrates das 2DES definieren, teilweise naßchemisch entfernt werden. Die nicht zu entfernenden Bereiche müssen hierzu mit einem säureresistenten Lack geschützt werden. Dieser besteht aus einem Gemisch aus dem Lack AZ PN 114 und 2-Methoxy-1-Methylacetat (EBX) im Verhältnis 1:1. Nach einem 30 sekündigen Aufschleudern bei  $6000 \text{ min}^{-1}$  wird dieser 60 Sekunden bei  $120^\circ\text{C}$  auf einer Heizplatte ausgebacken. Die Strukturen der Hall-Barren wurden dann mit einer Dosis von  $24 \mu\text{C}/\text{cm}^2$  im Elektronenstrahl-Schreiber belichtet und anschließend 7 Minuten bei einer Temperatur von  $100^\circ\text{C}$  auf der Heizplatte gehärtet. Bei diesem 'Negativ-Prozeß' bleiben im Gegensatz zum zuvor beschriebenen 'Positiv-Prozeß' die belichteten Bereiche vom Entwickler verschont. Als Entwickler dient bei diesem Prozeß eine Mischung aus ARZ MIF und Wasser im Verhältnis 2:1. Die Proben wurden nach einer Entwicklungszeit von 45 Sekunden mindestens 30 Sekunden unter Wasser, welches als Stopper dient, gespült.

Die Ätzlösung zum Ätzen des  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  besteht aus Wasser, Wasserstoffperoxid und Phosphorsäure im Verhältnis 38:1:1. Bei Raumtemperatur liegt die Ätzgeschwindigkeit dieser Säure bei ca. 100 nm/min. Da das 2DES nur ca. 80 nm unterhalb der Oberfläche liegt, wurden die Proben 2-3 Minuten lang geätzt und anschließend 5 Minuten unter fließendem Wasser gespült. Zuletzt wurde der schützende Lack mit einem Sauerstoffplasma verascht.

Auf dem Substrat ist nach diesem Prozeß nur noch 2DES innerhalb eines Steges - also dem Hall-Barren - stehengeblieben. Eine solche Struktur bezeichnet man als Mesa.

## 4.3 Herstellung der ohmschen Kontakte

Schließlich müssen noch elektrische Kontakte zum 2DES hergestellt werden. Die Problematik hierbei besteht darin, daß beim Aufdampfen eines Metalles auf die Halbleiteroberfläche in der

---

<sup>3</sup>Bei extrem kleinen Flächen beträgt die benötigte Dosis ein Vielfaches dieser Dosen, was bedeutet, daß der Proximity-Effekt hier die benötigte Dosis extrem herabsenkt.

Regel ein Schottky-Kontakt entsteht (siehe z. B. [Ber92]). Dieses Problem kann umgangen werden, wenn als Kontaktmaterial ein Gemisch aus Nickel, Gold und Germanium aufgedampft wird [Bra81]. Um die Oxidschicht auf der GaAs-Oberfläche zu entfernen, wurden die Proben vor dem Einbau in die Aufdampfanlage 10 Sekunden in 30 prozentiger Salzsäure 'gereinigt', nachdem die Bereiche der Kontakte im selben Verfahren wie die Marker definiert worden sind.

Nach einem folgenden Lift-Off-Prozeß wurden die Kontakte 90 Sekunden lang bei einer Temperatur von 420 °C unter Formiergasatmosphäre ( $N_2/H_2$ ) erhitzt. Bei diesem Prozeß diffundiert das Kontaktmaterial bis hinunter zum 2DES und bildet so einen ohmschen Kontakt.

## 4.4 Herstellung der SETs

Die Herstellung der SETs stellt extreme Anforderungen an die Lithographie und die Aufdampftechnik. Ein Tunnelkontakt besteht in der Regel aus Aluminium. Die Oberfläche wird oxidiert und eine zweite Aluminiumschicht darübergedampft. Abgesehen davon, daß die Elektronenstrahl-Lithographie sehr zeitaufwendig und teuer ist, sind hierbei zwei Punkte kritisch: zum einen muß die Oxidation unter definierten Bedingungen stattfinden, was bedeutet, daß die Probe zwischen beiden Bedampfungen nicht an die Luft darf, zum anderen muß die zweite Bedampfung mit einer Genauigkeit von wenigen Nanometern zur ersten ausgerichtet sein. Eine Lösung dieses Problems bietet die von *Dolan* und *Dunsmuir* [Dol88] beschriebene Zwei-Winkel-Bedampfungstechnik durch eine unterhöhlte Lackschablone. Leider entstehen bei dieser Technik parasitäre Schatten, welche sich prozeßbedingt in unmittelbarer Nähe des SETs befinden. Die Größe dieser Schatten entspricht exakt der Größe der SET-Insel und es ist offensichtlich, daß eine derart 'große' Metallinsel in der Nähe der Meßsonde einen nicht kalkulierbaren Einfluß auf die Messungen hat. Insbesondere bei Messungen mit einem zusätzlichen Seitengate (vgl. Abbildung 6.3) ist es offensichtlich, daß eine zusätzliche Metallfläche zwischen SET und dem Seitengate störend wirken muß. Deshalb wurde in dieser Arbeit dieser Prozeß zu einem Drei-Winkel-Prozeß weiterentwickelt, bei dem parasitäre Schatten vermieden werden. Dieser Prozeß ist in Abbildung 4.2 skizziert:

1. Aufbringen einer Sandwich-Struktur aus aufgeschleudertem Copolymer, aufgedampften Germanium und aufgeschleudertem PMMA.
2. Schreiben der Struktur in die PMMA-Schicht mittels Elektronenstrahl-Lithographie und anschließendes Entwickeln in einer Lösung aus MIBK und Isopropanol.
3. Übertragen dieser Struktur in die darunterliegende Germaniumschicht mittels reaktivem Ionenätzen (RIE) in einem  $CF_4$ -Plasma.
4. Veraschen des verbleibenden PMMA auf und teilweise auch unter der Germaniumschicht.
5. Aufdampfen von Aluminium unter senkrechtem Einfallswinkel.
6. Kontrollierte Sauerstoffzufuhr in die Vakuumkammer bedeckt das aufgedampfte Aluminium mit einem dünnen Oxidfilm.
7. Aufdampfen von Aluminium unter schrägem Einfallswinkel.
8. Aufdampfen von Aluminium unter entgegengesetztem schrägen Einfallswinkel.

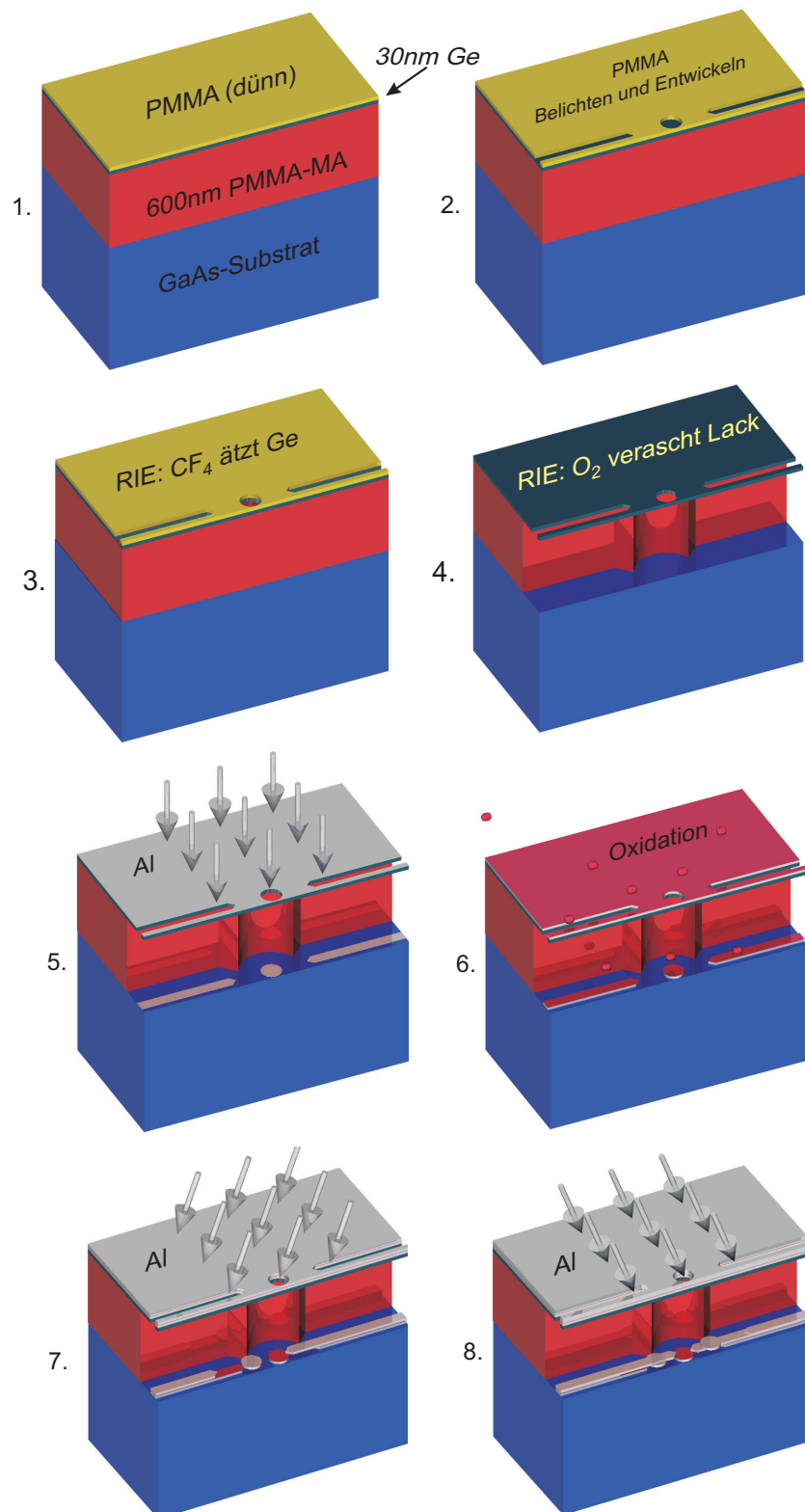


Abbildung 4.2: Herstellungsprozeß der SETs.

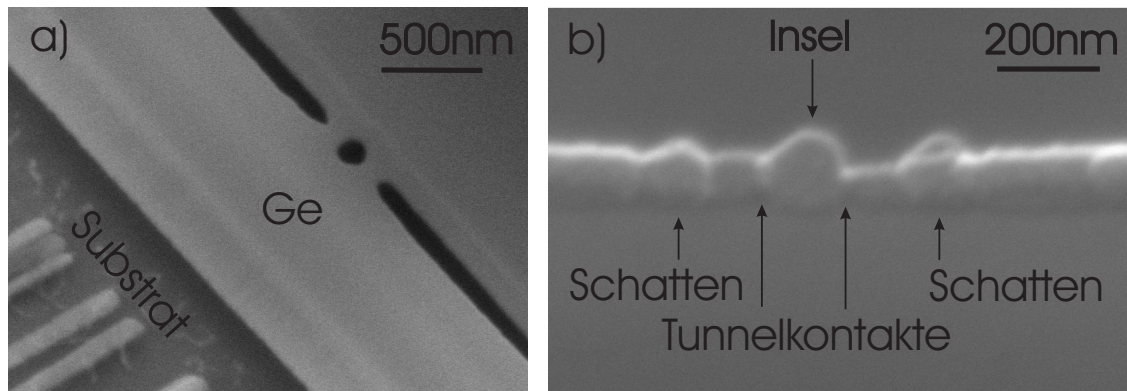


Abbildung 4.3: a) Unterhöhlte Germaniummaske für einen SET auf GaAs-Substrat. Ca.  $1\text{ }\mu\text{m}$  neben der SET-Struktur befindet sich eine weitere Struktur, auf die später noch eingegangen wird. Die hellen Linien ca.  $200\text{ nm}$  neben den Strukturen deuten den Unterschnitt an. b) Aluminium-SET auf GaAs-Substrat. Neben der Insel und den Zuleitungen sind die Schatten der einzelnen Bedampfungen zu erkennen.

Abbildung 4.3a) zeigt eine REM-Aufnahme einer teilweise unterhöhlten Germaniummaske, wie sie nach Schritt Nr. 4 vorliegt. Der Unterschnitt beträgt ca.  $200\text{ nm}$  und ist durch eine hellere Linie neben den Strukturen zu erkennen. Nach dem Aufdampfen und einem anschließendem Lift-Off-Prozeß in Aceton erhält man einen Transistor wie in Abbildung 4.3b). Man erkennt die Schatten der Insel auf beiden Zuleitungen. Die Löcher in der Germaniummaske werden beim Aufdampfen kontinuierlich kleiner, was man sehr schön an der unterschiedlichen Größe der Schatten erkennt.

## 4.5 Meßtechnik

Alle hier vorgestellten Experimente wurden in einem kommerziellen  $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Mischungskryostaten-System des Typs *TLM 400* der Firma *Oxford Instruments* durchgeführt. Dieses System ermöglicht eine Abkühlung der Proben auf eine Basistemperatur von ca.  $25\text{ mK}$ . Der im System integrierte supraleitende Magnet stellt unter Normalbedingungen Magnetfelder von bis zu  $14\text{ T}$  bereit<sup>4</sup>. Gemessen wurde bei den meisten Experimenten immer bei Basistemperatur des Kryostaten. Wurde bei höherer Temperatur gemessen, so wird dies bei den entsprechenden Meßkurven explizit erwähnt.

Zur Messung der Probentemperatur wurde ein im Innern des Kryostaten auf Probenhöhe angeordneter  $\text{RuO}_2$  Widerstand benutzt, welcher direkten Kontakt zum flüssigen  $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Gemisch hat, in dem sich die Probe befindet.

Die verwendete Meßelektronik ist ein eigens in der PTB hergestelltes Mehrkanal-Meßsystem mit der internen Bezeichnung *DAD* [Bec00], welches für die SET-Messungen entsprechend individuell erweitert wurde. Dies wird im Detail in den entsprechenden Abschnitten erläutert.

<sup>4</sup>Es gibt auch noch die Möglichkeit, die Magnetspule, welche sich im  $^4\text{He}$ -Bad befindet, mit einem integrierten 'Lambda-Kühler' auf  $T \approx 2.2\text{ K}$  abzukühlen. Das maximale Feld liegt dann bei  $B=16\text{ T}$ .

# Kapitel 5

## Lokale Änderungen im chemischen Potential eines 2DES

### 5.1 Chemisches, elektrostatisches und elektrochemisches Potential

Für die Interpretation der folgenden Messungen ist das Verständnis der Begriffe *Chemisches Potential*, *Elektrostatisches Potential* und *Elektrochemisches Potential* sehr wichtig. Sie werden deshalb an dieser Stelle einleitend erläutert.

Das *chemische Potential* entspricht der Änderung der inneren Energie eines thermodynamischen Systems, wenn man die Teilchenzahl um  $\Delta N = 1$  erhöht. Bei einem Metall sind bei  $T = 0$  alle Elektronenzustände bis zur Fermi-Energie mit der Wahrscheinlichkeit *eins* besetzt. Erhöht man die Anzahl der Elektronen um eins, so bedarf dies der Fermi-Energie, die in diesem Fall dem

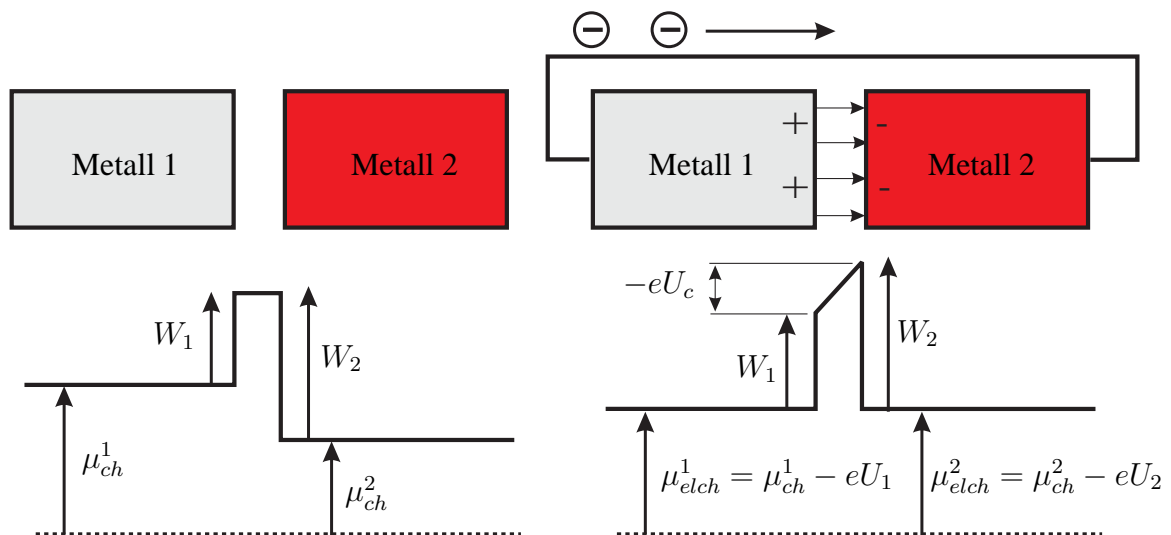


Abbildung 5.1: Werden zwei elektrisch neutrale Metalle mit unterschiedlichen chemischen Potentialen  $\mu_{ch}^1, \mu_{ch}^2$  und Austrittsarbeiten  $W_1, W_2$  miteinander in Kontakt gebracht, gleichen sich die elektrochemischen Potentiale  $\mu_{elch}^1$  und  $\mu_{elch}^2$  aus. An der Grenze zwischen beiden Materialien baut sich eine Kontaktspannung  $U_c$  auf.

chemischen Potential entspricht.

Zwei unterschiedliche Metalle (jedes sei elektrisch neutral) haben im allgemeinen unterschiedliche chemische Potentiale  $\mu_{ch}^1$  und  $\mu_{ch}^2$ . Dies äußert sich in unterschiedlichen Austrittsarbeiten  $W_1$  und  $W_2$ , die benötigten Energien um ein Elektron des jeweiligen Metalls vom Fermi-Niveau in die Unendlichkeit (Vakuumniveau) zu befördern.

Verbindet man diese beiden Metalle jetzt miteinander, wie in Abbildung 5.1 (rechts) skizziert und sie sind im thermodynamischen Gleichgewicht, so müssen beide Fermi-Energien nivelliert sein. Dies geschieht dadurch, daß Ladungsträger von Metall 1 mit höherem chemischen Potential in das Metall 2 fließen. Bezüglich des ursprünglichen Referenzpotentials (gestrichelte Linie) haben sich jetzt zusätzliche elektrostatische Potentiale  $\mu_{elst}^1 = -eU_1$  und  $\mu_{elst}^2 = -eU_2$  aufgebaut, während die Summe aus elektrostatischem Potential  $\mu_{elst}$  und chemischem Potential  $\mu_{ch}$ , das elektrochemische Potential  $\mu_{elch}$ , in beiden Metallen gleich ist. Gleichzeitig baut sich im Übergangsbereich eine Kontaktspannung  $U_c$  auf, für die gelten muß:

$$eU_c = \Delta\mu_{ch} . \quad (5.1)$$

## 5.2 Der SET als Potentialsonde für ein 2DES

Der SET aus Aluminium und das 2DES der Heterostruktur sind beides Metalle (bzw. entartete Halbleiter) mit den eben beschriebenen Eigenschaften. Aufgrund ihrer unterschiedlichen Austrittsarbeiten und Fermi-Energien wird zwischen 2DES und dem SET die eben beschriebene intrinsische Kontaktspannung  $U_c$  entstehen.

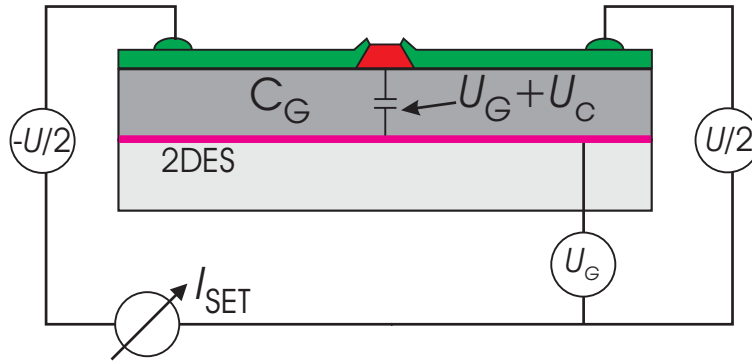


Abbildung 5.2: Skizze mit Schaltbild eines SETs auf einer Heterostruktur mit einem 2DES, welches sich weniger als 100 nm unterhalb der Oberfläche befindet. Über den SET fällt die Spannung  $U = U_{DS}$  ab, die Gate-Spannung  $U_G$  wirkt kapazitiv über das 2DES auf die SET-Insel. Aufgrund der unterschiedlichen chemischen Potentiale in den Materialien des SETs und dem 2DES addiert sich auf die Gate-Spannung noch eine intrinsische Kontaktspannung  $U_c$ .

Wenn man, wie am Ende von Kapitel 3 beschrieben, eine geeignete Spannung  $U_{DS}$  an den Transistor anlegt, wird der Strom durch den Transistor mittels einer Gate-Spannung  $U_G$ , die in diesem Fall das elektrostatische Potential  $\mu_{elst}^{2DES}$  des 2DES verändert, periodisch verändert. Abbildung 5.3 zeigt diese Coulomb-Blockade-Oszillationen (CBOs) bei unterschiedlichen Magnetfeldern. Weiß bedeutet Stromfluß und schwarz Coulomb-Blockade. Die weißen Linien zeigen einen Verlauf, der an Abbildung 2.8 erinnert.



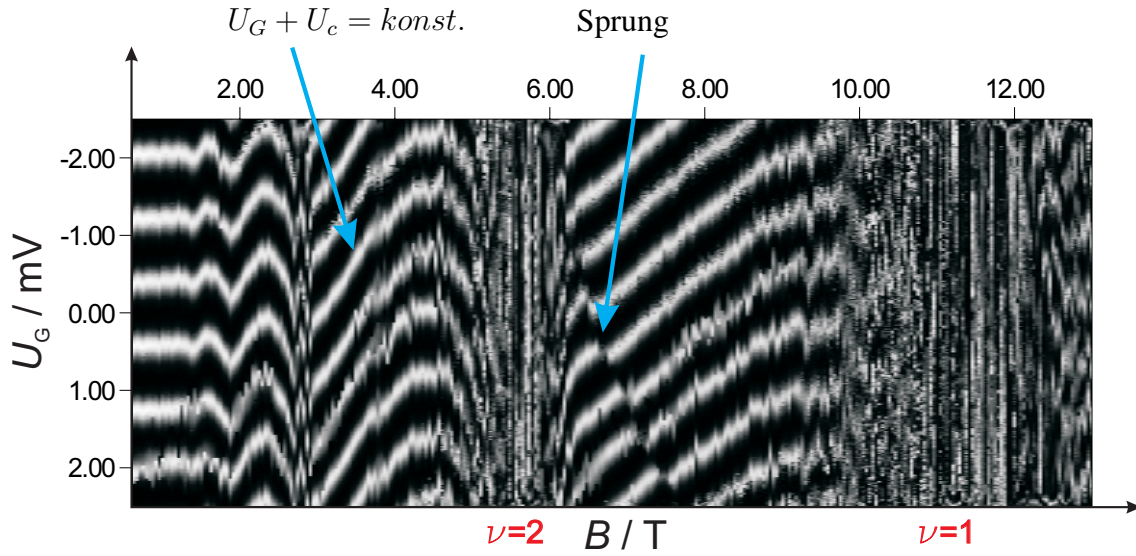


Abbildung 5.3: Coulomb-Blockade-Oszillationen eines SETs, angesteuert über das 2DES einer GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As-Heterostruktur bei unterschiedlichen Magnetfeldern. In den schwarzen Regionen herrscht Coulomb-Blockade, hellere Graustufen bis weiß bedeuten Stromfluß durch den SET.  $U_G$  wurde auf und ab bei jeweils konstantem Magnetfeld durchfahren.

Wie läßt sich dies erklären?

Die zwischen SET-Insel und 2DES anliegende Spannung ist die Summe aus Gate-Spannung  $U_G$  und Kontaktspannung  $U_c$ . Auf den Maxima der CBOs, den weißen Linien, ist demnach  $U_G + U_c = konst.$ , was bedeutet, daß sich die Kontaktspannung  $U_c$  mit dem Magnetfeld ändert. Nach 5.1 gilt:

$$eU_c = \mu_{ch}^{AL} - \mu_{ch}^{2DES} \quad (5.2)$$

$$\Rightarrow e \frac{dU_c}{dB} = \frac{d\mu_{ch}^{AL}}{dB} - \frac{d\mu_{ch}^{2DES}}{dB} . \quad (5.3)$$

Die Änderung des chemischen Potentials in nicht supraleitendem Aluminium mit dem Magnetfeld ist vernachlässigbar. Es gilt daher:

$$dU_c = -\frac{1}{e} d\mu_{ch}^{2DES} . \quad (5.4)$$

Änderungen im chemischen Potential des 2DES reflektieren sich direkt in einer Änderung der Kontaktspannung  $dU_c$  zwischen der SET-Insel und dem 2DES. Vergrößert sich  $\mu_{ch}^{2DES}$ , so verringert sich die Kontaktspannung, und die Coulomb-Blockade-Oszillationen werden auf der  $U_G$ -Achse zu kleineren Spannungen verschoben. In Abbildung 5.3 sieht man also eine Abbildung des Landau-Fächers (vgl. Abbildung 2.8).

Um ganzzahlige Füllfaktoren herum ist das Signal/Rausch-Verhältnis ungünstig. Dieses Verhalten wird im späteren Verlauf dieser Arbeit analysiert. Zwischen Füllfaktor  $\nu = 2$  und  $\nu = 1$  machen die CBOs abhängig von  $U_G$  und  $B$  einen Sprung. Dieses Verhalten ist vermutlich auf das Be- und Entladen einer Störstelle im Halbleitermaterial zwischen SET und 2DES zurückzuführen<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Man sieht dies übrigens auch in den CBOs aus Abbildung 3.6. Dort schalten auf der rechten Seite des Graphen die CBOs zwischen zwei stabilen Kurven hin- und her. Je nachdem, ob die Störstelle geladen oder elektrisch neutral ist, liegen die CBOs auf zwei leicht gegeneinander verschobenen Kennlinien.

### 5.3 Messen mit einer Rückkoppschleife

Für den Graustufenplot aus Abbildung 5.3 benötigt man ca. 500 Einzelmeßkurven, für deren Aufnahme es im Normalfall ca. 12 Stunden bedarf. Abgesehen von diesem enormen Zeitaufwand fehlt auch völlig der Zugang zu dynamischen Effekten. Dieses Problem läßt sich umgehen, wenn man die Linearität der  $I_{SET}(U_G + U_c)$ -Kennlinie im Bereich der Wendepunkte für eine direkte Messung

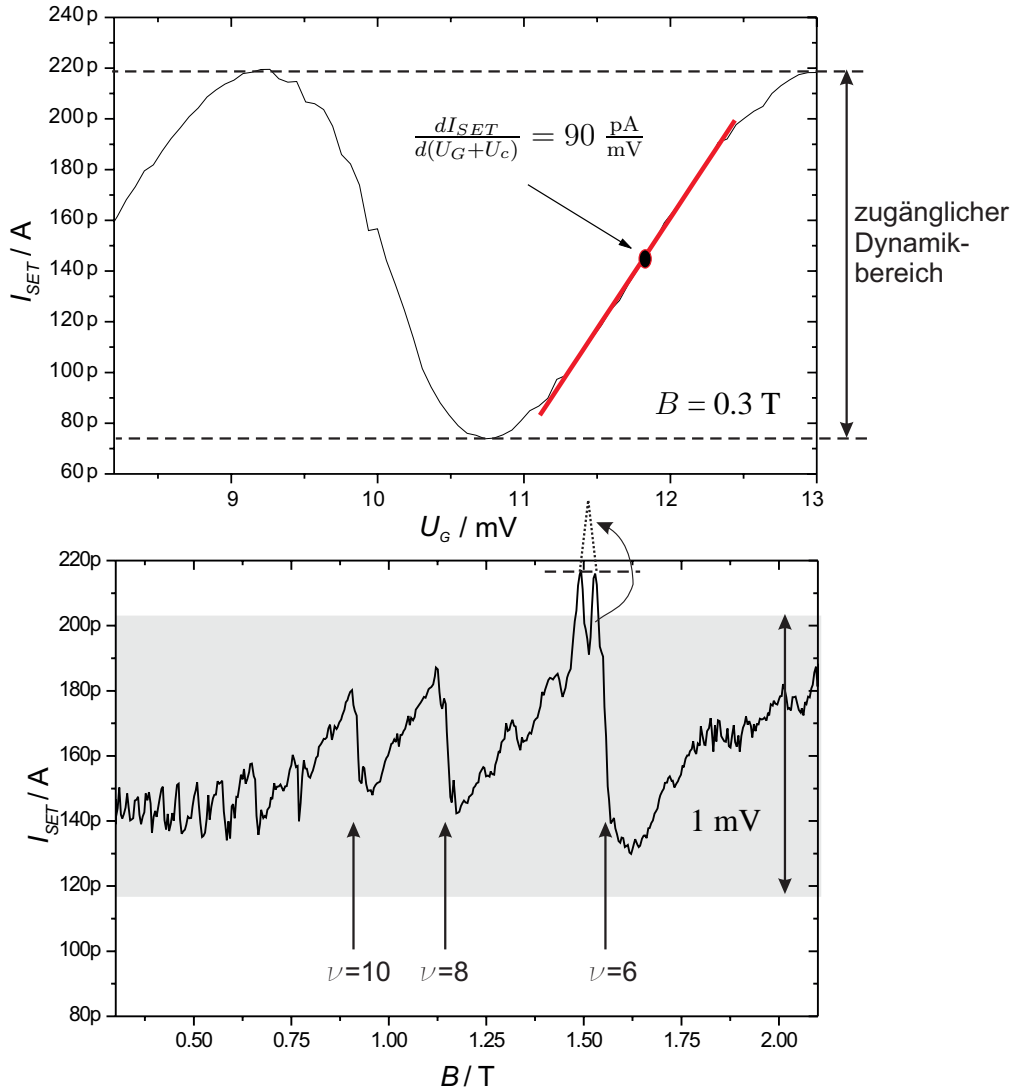


Abbildung 5.4: Oben: Coulomb-Blockade-Oszillation eines SETs, angesteuert über das 2DES einer GaAs/ $Al_xGa_{1-x}As$ -Heterostruktur. Im Bereich  $11.2 mV < U_G < 12.5 mV$  ist  $I_{SET}(U_G + U_c)$  praktisch linear. Unten: Setzt man den SET durch geeignete Wahl der Gate-Spannung  $U_G$  in einen Arbeitspunkt in der Mitte dieses Bereiches, so werden, bei Variation des Magnetfeldes  $B$ , Änderungen in der Kontaktspannung  $U_c$  linear in die Meßgröße  $I_{SET}$  umgesetzt. Werden die Änderungen  $dU_c$  zu stark, verläßt man den zugänglichen Dynamikbereich an dessen oberer Grenze, was den großen Peak bei  $B = 1.5 T$  abschneidet und dadurch einen Doppelpack vortäuscht.

von  $\Delta U_c$  nutzt.

In Abbildung 5.4 wurde ein SET durch geeignete Wahl von  $U_{DS}$  und  $U_G$  in einen Arbeitspunkt in der Nähe eines Wendepunktes mit positiver Steigung gesetzt. Änderungen in  $U_c$  entsprechen in einem Bereich  $\Delta U_c \approx \pm 0.5$  mV einer linearen Änderung  $dI_{SET} = \frac{dI_{SET}}{d(U_G+U_c)} dU_c$ . Wird das Magnetfeld variiert, ändert sich die Fermi-Energie des 2DES und dazu proportional die Kontaktspannung zwischen 2DES und SET. Die Änderungen im SET-Strom  $I_{SET}(B)$  in Abbildung 5.4 (unten) spiegeln somit Oszillationen der Fermi-Energie des 2DES wider. Allerdings werden ab  $B = 1.5$  T diese Änderungen zu groß, der SET kommt in einen Bereich entgegengesetzter Steigung, und eine Proportionalität  $dI_{SET} \sim dU_c$  ist nicht mehr gegeben.

Kompensiert man hingegen während einer Messung Änderungen in  $U_c$  durch Änderungen in der Gate-Spannung  $U_G$ , daß  $dI_{SET} \sim dU_c$  permanent gegeben ist, so kann der Meßbereich des SETs bis hin zu großen Spannungsänderungen erweitert werden. Abbildung 5.5 zeigt die Realisierung einer solchen Rückkoppelschaltung. An den Transistor wird eine bezüglich Masse symmetrische Drain-Source-Spannung  $U_{DS}$  angelegt. Ein Operationsverstärker verstärkt  $I_{SET}$  in eine Spannung, von der im folgenden Operationsverstärker eine Referenzspannung  $U_{Ref}$  subtrahiert wird. Verläßt der Transistor durch eine Änderung  $dU_c$  seinen Arbeitspunkt, erzeugt ein *PID-Regler* eine der entstehenden Spannungsdifferenz entgegengesetzte Spannung  $U_{FB}$ , die in einem weiteren Operationsverstärker der ursprünglich angelegten Gate-Spannung hinzuaddiert wird, bis der

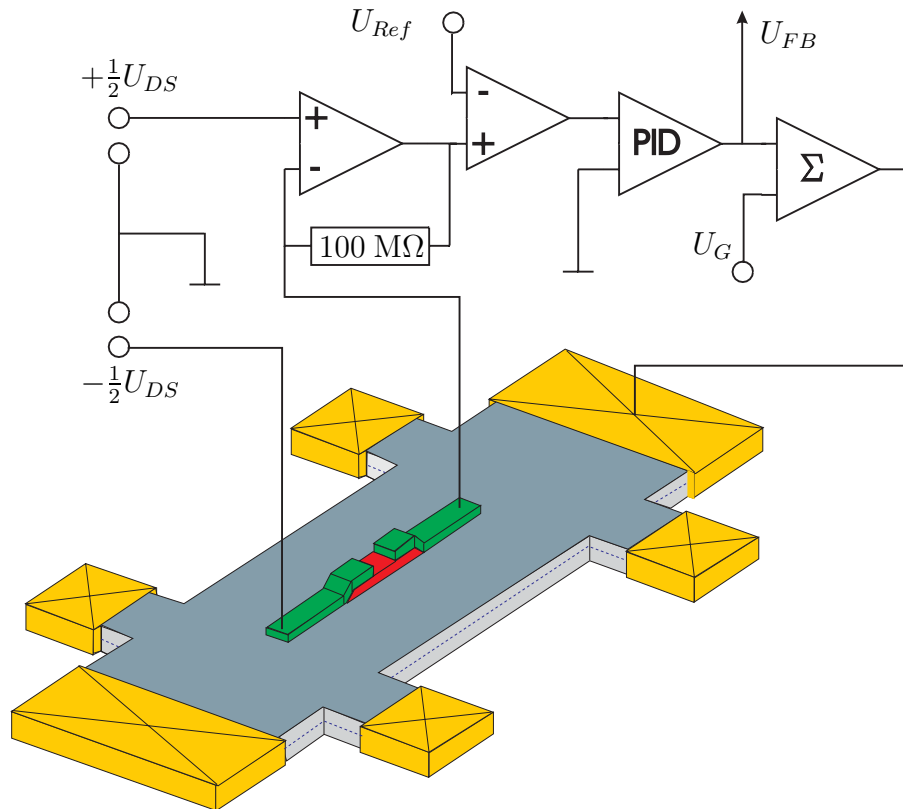


Abbildung 5.5: Rückkoppelschleife, die den SET während einer Messung permanent im Arbeitspunkt hält. Dies geschieht durch die Kompensation von auf den SET wirkende Spannungsänderungen, mit einer Spannung  $U_{FB}$  (Feedback), die auf die angelegte Gate-Spannung  $U_G$  aufaddiert wird.

Transistor wieder im gewählten Arbeitspunkt ist.

Die Rückkopplungsspannung<sup>2</sup>  $U_{FB}$  kompensiert also  $\Delta U_c$  und ist daher die geeignete Meßgröße, um den Verlauf von  $\Delta U_c$  in Abhängigkeit von z. B. dem Magnetfeld zu erfassen.

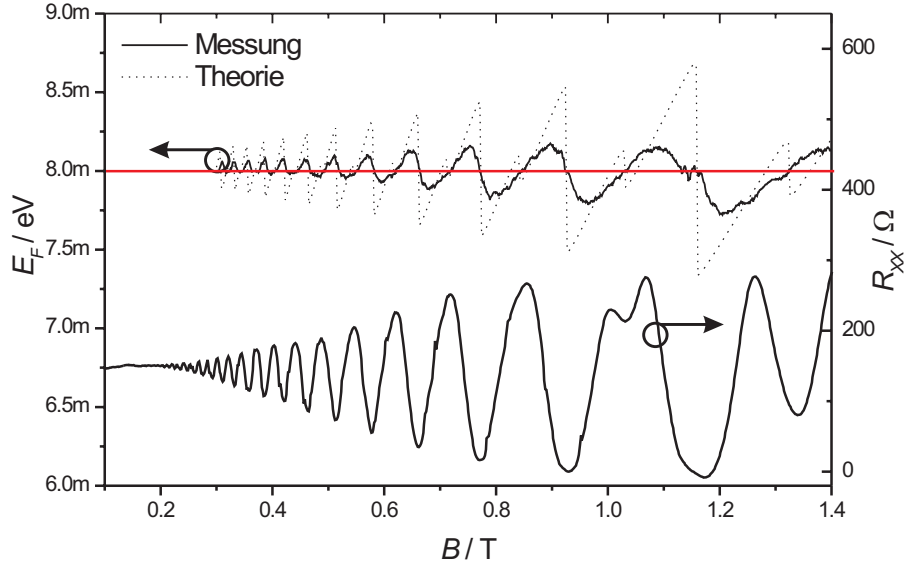


Abbildung 5.6: SdH-Oszillationen, gemessener und berechneter Verlauf der Fermi-Energie. Bei der Berechnung der Fermi-Energie wurde keine Niveaubreiterung berücksichtigt.

Abbildung 5.6 zeigt den Verlauf einer solchen Messung. Parallel dazu ist der magnetische Längswiderstand  $R_{xx}$  gezeigt, der separat gemessen wurde. Da mit dieser Methode nur Änderungen, jedoch keine Absolutwerte der Fermi-Energie gemessen werden können, wurde  $E_F^0$  aus der Ladungsträgerkonzentration  $n$  bestimmt und zu den Änderungen in  $U_{FB}$  addiert.

Qualitativ stimmt der gemessene Verlauf sehr gut mit dem aus Abbildung 2.8 (gestrichelte Kurve) überein. Die Änderungen sind allerdings viel schwächer und verwaschener, als man für ein ideales 2DES erwartet. Der Grund dafür ist in der Verbreiterung der Landau-Niveaus zu suchen. Je mehr die Peaks der Zustandsdichte verbreitert sind, desto stärker weicht der wirkliche Verlauf vom idealen Fall ab.

In Abbildung 5.7 wurde bei  $T = 0$   $E_F(B)$  eines 2DES mit einer Ladungsträgerkonzentration von  $n = 2.24 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ , was der Ladungsträgerkonzentration der gemessenen Probe entspricht, numerisch bestimmt. Bei der Rechnung wurden eine konstante Anzahl von Ladungsträgern:  $n = \int_0^{E_F} D(E) dE$  und eine gaußförmige Verbreiterung der Zustandsdichte der Form

$$D(E) = \frac{eB}{h} \sum_{N,s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma^2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{E - E_{N,s}}{\Gamma} \right)^2 \right] \quad (5.5)$$

angenommen. Schon eine geringe Verbreiterung der Landau-Niveaus sorgt für ein starkes Verwaschen der Oszillationen. Die gemessene Kurve (rot) läßt auf eine Niveaubreiterung von

<sup>2</sup>Engl.: Feedback

$\Gamma = 400 \mu\text{eV}$  schließen. Ein Anpassen der SdH-Oszillationen nach Gleichung (2.42) ergibt mit  $\Gamma = 310 \mu\text{eV}$  eine geringere Niveauverbreiterung. Bei kleineren Magnetfeldern liegt der deutliche Unterschied der gemessenen und gerechneten Kurven im Bereich der abfallenden Flanken um ganzzahlige Füllfaktoren. Bei dem der Rechnung zugrunde gelegten Modell gibt es keine Zustände zwischen den Landau-Niveaus, was einen extrem steilen Abfall zur Folge hat. Der gemessene, weniger steile Abfall, kann durch eine den Gauß-Peaks überlagerte Untergrundzustandsdichte, wie sie auch in [Wei86, Sta85] vorgeschlagen wird, erklärt werden. Des weiteren sieht man, daß die gemessene Kurve bei höheren Magnetfeldern immer mehr von der gerechneten abweicht. Dies zeigt, daß die wirkliche Verbreiterung der Landau-Niveaus mit dem Magnetfeld zunimmt, worauf hier aber nicht weiter eingegangen werden soll.

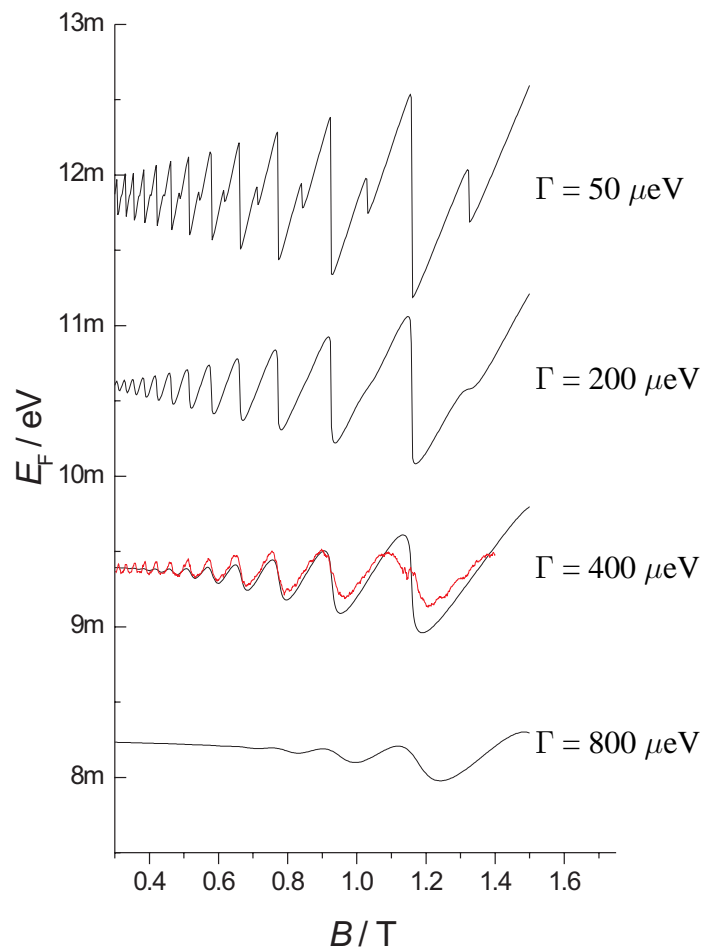


Abbildung 5.7: Vergleich zwischen gemessenem (rote Kurve) und berechnetem Verlauf der Fermi-Energie. Je stärker die Verbreiterung der Landau-Niveaus ( $\Gamma$ =Halbwertsbreite) angenommen wird, desto stärker verschmiert der Landau-Fächer. Zur besseren Übersicht wurden die Kurven auf der  $E_F$ -Achse vertikal verschoben.

## 5.4 Einfluß der SET-Sonde auf das 2DES

Das aufgedampfte Metall der SET-Sonde bildet mit der  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Heterostruktur einen *Schottky-Übergang* mit einer intrinsischen Kontaktspannung  $U_c$ , wie in Abschnitt 5.1 beschrieben. Dieser Übergang ist für große negative und kleine positive Spannungen zwischen SET und 2DES nicht-

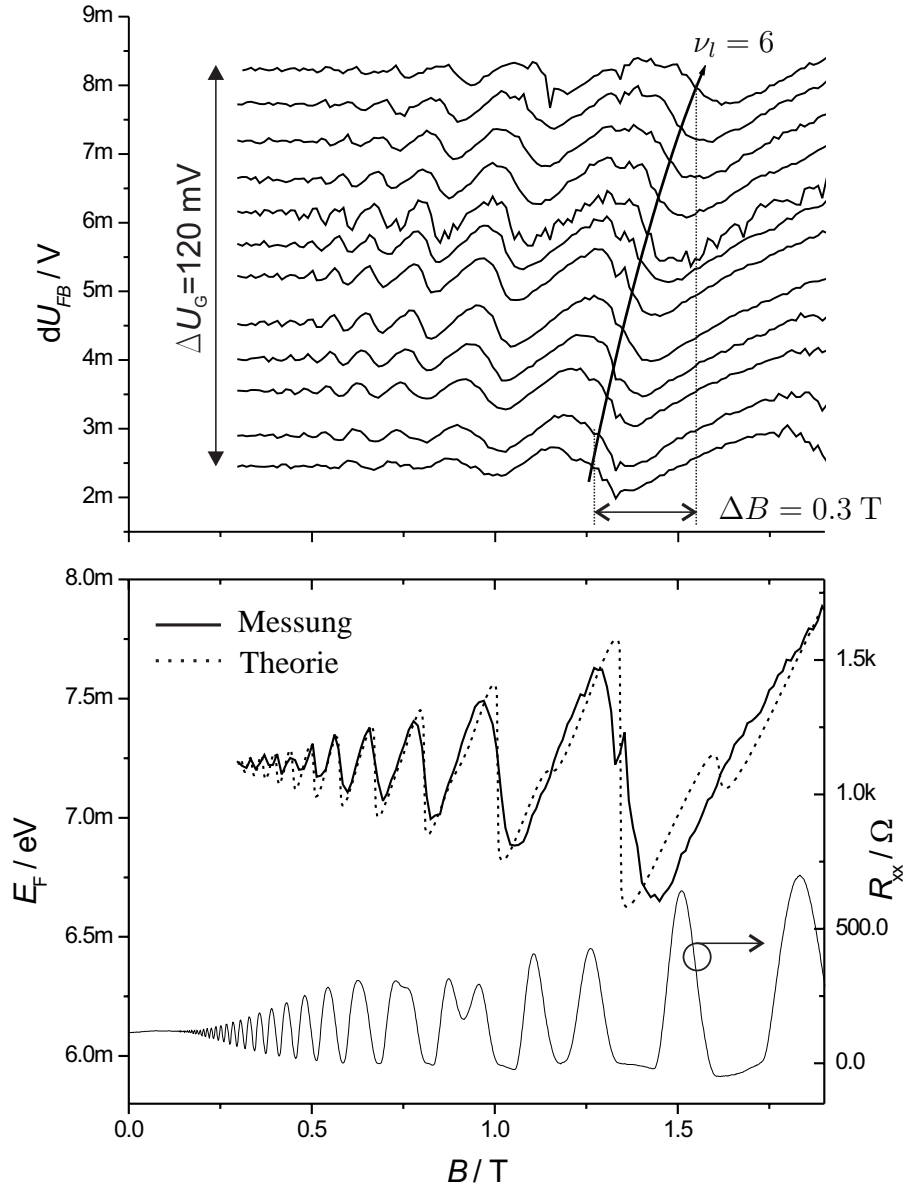


Abbildung 5.8: Oben: Rückkopplungsspannung  $U_{FB}(B)$  für unterschiedliche Spannungen  $U_G$  des 2DES relativ zum SET. Ein Erhöhen von  $U_G$  verarmt das 2DES lokal unter dem SET und schiebt den Landau-Fächer zu kleineren Magnetfeldern. Unten:  $U_{FB}(B)$  bei optimaler Anpassung im Vergleich mit gerechneter Variation der Fermi-Energie. Niveauverbreiterung und Ladungsträgerkonzentration wurden durch Anpassen der SdH-Oszillationen ( $R_{xx}(B)$ ) bestimmt.

leitend, was ein notwendiges Kriterium für die bisher vorgestellten Messungen ist.

Durch die Gate-Spannung  $U_G$  kann jedoch die lokale Ladungsträgerdichte  $n_l$  des 2DES unterhalb des SETs variiert werden. Eine negative Spannung des SETs relativ zum 2DES (was nach Abbildung 5.5 einer positiven Gate-Spannung  $U_G$  entspricht) verarmt dieses, eine positive hingegen erhöht die lokale Ladungsträgerkonzentration unterhalb des SETs.

Da mit dem SET Potentialänderungen in seiner nächsten Umgebung registriert werden, hat die absolute Größe der Gate-Spannung einen Einfluß auf das Meßergebnis. Abbildung 5.8 zeigt den Einfluß unterschiedlicher Gate-Spannungen  $U_G$  auf die Variation der Fermi-Energie.

Änderungen  $dU_{FB}$ , die direkt die Änderung der Fermi-Energie des 2DES mit dem Magnetfeld widerspiegeln, werden bei negativer Gate-Spannung zu höheren Magnetfeldern und bei positiver zu niedrigeren Magnetfeldern verschoben. Weiter sieht man, wie der Übergang um Füllfaktor  $\nu=6$  immer unschärfer wird, je weiter die lokale Ladungsträgerkonzentration unterhalb des SETs von der globalen abweicht. Der lokale Füllfaktor  $\nu_l=6$  schiebt in dieser Grafik im Bereich  $1.25 \text{ T} < B < 1.55 \text{ T}$ , was einer Variation der lokalen Ladungsträgerkonzentration unterhalb des SETs von  $1.81 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  nach  $2.25 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  entspricht.

Es ist bei dieser Meßtechnik also sinnvoll, die Gate-Spannung so zu wählen, daß die lokale Ladungsträgerkonzentration unterhalb des SETs der globalen gleicht. Abbildung 5.8 (unten) zeigt die SdH-Oszillationen im Längswiderstand<sup>3</sup> und die Kurve der oberen Grafik, die diese Bedingung am besten erfüllt. Die Niveauverbreiterung der Landau-Niveaus wurde zu  $\Gamma = 190 \text{ } \mu\text{eV}$  bestimmt. Der theoretisch bestimmte Verlauf der Fermi-Energie und der gemessene stimmen in diesem Fall relativ gut überein. Die Abweichungen im Bereich ganzzahliger Füllfaktoren und höherer Magnetfelder lassen sich auch hier mit einer den Gauß-Peaks überlagerten Untergrundzustandsdichte und einem Anstieg der Niveauverbreiterung mit steigendem Magnetfeld erklären.

## 5.5 Zusammenfassung

Mit Hilfe eines SETs auf der Oberfläche einer  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Heterostruktur können elektrostatische Potentialänderungen zwischen SET und 2DES mit hoher Genauigkeit und sehr guter Ortsauflösung gemessen werden. Die Ortsauflösung wird dabei durch den Durchmesser der SET-Sonde und ihrem Abstand zum 2DES bestimmt. Mit einer sensitiven Fläche der für diese Arbeit eigens entwickelten SET-Sonden von nur ca.  $0.018 \text{ } \mu\text{m}^2$  ist dies weniger als  $\frac{1}{5}$  der Fläche der von J. Hüls [Hül01] und Y. Wei [Wei97, Wei98] eingesetzten SET-Elektrometern, welche bislang als die empfindlichsten dieser Art betrachtet wurden [Hül01].

Ist das 2DES im thermodynamischen Gleichgewicht, so lassen sich diese Änderungen im elektrostatischen Potential auf Änderungen des chemischen Potentials des 2DES, bedingt durch die sukzessive Depopulation der Landau-Niveaus im Bereich ganzzahliger Füllfaktoren, zurückführen. Messungen, bei denen die Spannung zwischen SET und 2DES variiert wurde, zeigen, daß der Einfluß der SET-Sonde auf das 2DES nicht zu vernachlässigen ist, da sie die Ladungsträgerkonzentration in ihrer Nähe erheblich verändern kann.

<sup>3</sup>Es handelt sich hier um die bereits in Abschnitt 2.3 vorgestellte Probe.





# Kapitel 6

## Elektronische Eigenschaften des 2DES am Rand

Jedes real existierende zweidimensionale Elektronensystem hat einen Rand. Da jenseits dieses Randbereiches die Ladungsträgerkonzentration gleich null ist, gibt es auch einen Bereich, in dem sie vom Wert  $n$  auf Null abfallen muß. Bei den hier verwendeten Hall-Barren, in denen das 2DES durch eine geätzte Mesakante begrenzt wird, weist daher die Ladungsträgerkonzentration in einem schmalen Bereich entlang der Mesakante einen Gradienten auf. Dieser Bereich hat stark vom Rest der Probe abweichende Eigenschaften, die in diesem Kapitel ausführlich diskutiert werden.

### 6.1 Physikalische Bedeutung des Probenrandes

Wenn die Ladungsträgerkonzentration  $n$  und damit auch das chemische Potential  $\mu_{ch}$  einen Gradienten aufweisen, so kommt es aufgrund der Diffusion von Ladungsträgern zu einem Diffusionsstrom, der versucht diesen Gradienten auszugleichen. Soll die Änderung in der Ladungsträgerkonzentration Bestand haben, so muß der Diffusionsstrom durch einen Feldstrom kompensiert werden. Eine Änderung im chemischen Potential  $\mu_{ch}$  ist demnach immer mit einer Änderung im elektrostatischen Potential  $-eU$  verbunden, solange sich die Probe im thermodynamischen Gleichgewicht befindet.

Mit anderen Worten: Befindet sich das 2DES im thermodynamischen Gleichgewicht, so ist das elektrochemische Potential  $\mu_{elch} = \mu_{ch} - eU$  im gesamten 2DES konstant. Das Einschlußpotential  $-eU$ , welches die Elektronen quasi in der Probe hält, hat zur Folge, daß die sich unter Einfluß eines starken Magnetfeldes bildenden Landau-Niveaus am Rand *nach oben biegen*. Dies ist in Abbildung 6.1 b) gezeigt. Entlang Linien, auf denen die Landau-Niveaus die Fermi-Energie schneiden, bilden sich demnach Randkanäle aus (a). Jedes Landau-Niveau hat eine Ladungsträgerkonzentration  $n_L$ . Die lokale Ladungsträgerkonzentration fällt also zum Rand hin in Stufen von  $\Delta n = n_L$  ab. In Abbildung 6.1 c) ist dies gezeigt, allerdings ohne die Spin-Aufspaltung zu berücksichtigen.

Energetisch günstiger ist allerdings eine graduelle Variation der Ladungsträgerkonzentration. Dies zeigen Rechnungen, bei denen die Abschirmeigenschaften des 2DES berücksichtigt wurden [Efr88, Cha90, Bee90, Chk92, Lie94]. Abbildung 6.1 (d)-(f) zeigt die Situation aus Abb. 6.1 (a)-(c) unter Berücksichtigung der füllfaktorabhängigen Abschirmeigenschaften des 2DES. In den kompressiblen Bereichen ist eine Umverteilung der Ladungsträger möglich, die nach [Chk92] die

Gesamtenergie des Systems senkt. Des weiteren wird das elektrische Feld des Einschlußpotentials dort vollständig abgeschirmt. Es entstehen relativ breite kompressible Randstreifen, in denen die

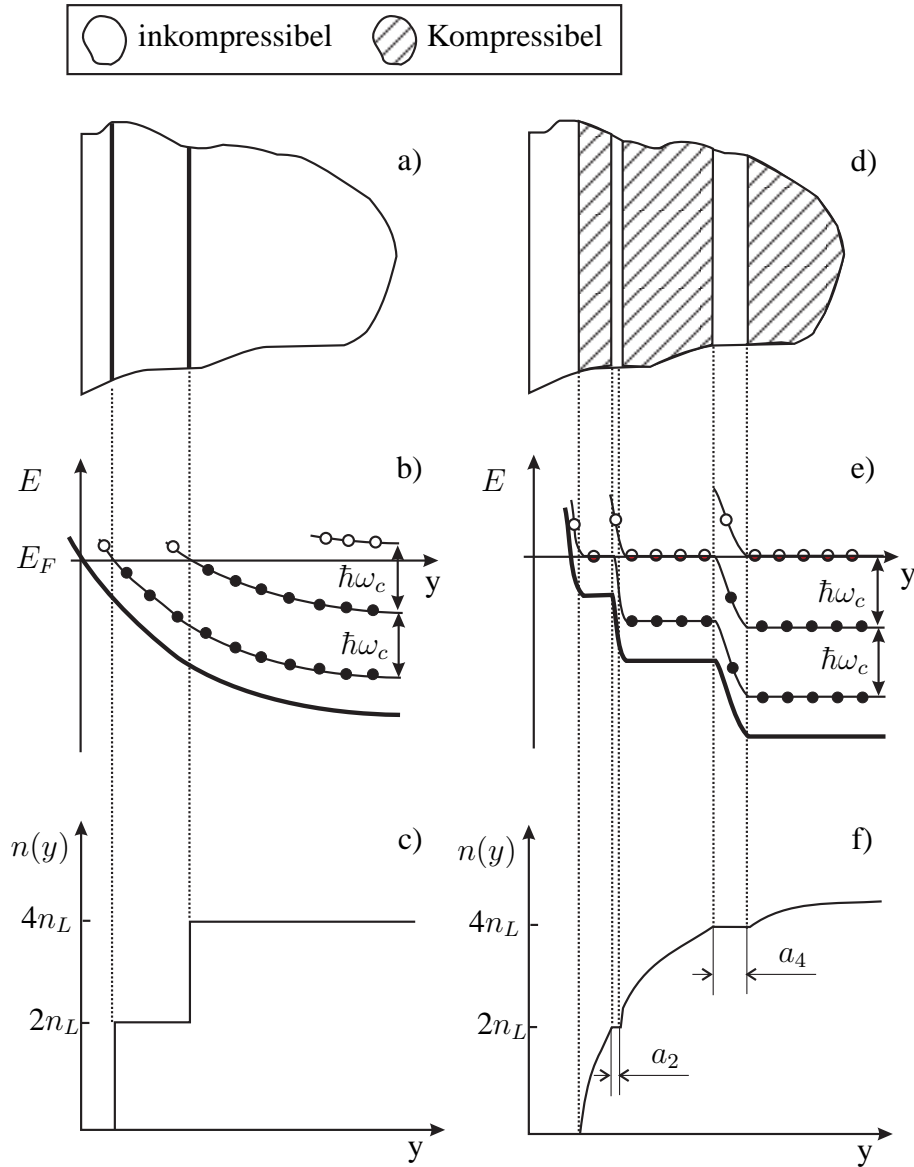


Abbildung 6.1: Struktur der Randzustände nach [Chk92] unter Vernachlässigung der Spin-Aufspaltung. (a)- (c) Ein-Teilchen-Modell (Abschirmeigenschaften des Elektronensystems nicht berücksichtigt). a) Aufsicht auf die Ebene des 2DES in der Nähe des Probenrandes. Es gibt zwei Randkanäle mit halbzahligen (lokalen) Füllfaktor. b) Aufbiegen der Landau-Niveaus entlang des (zum Rand hin) ansteigenden elektrostatischen Potentials. Die gefüllten Kreise repräsentieren besetzte Landau-Niveaus, die offenen nicht-besetzte. c) Ladungsträgerkonzentration als Funktion des Abstandes zum Probenrand. (d) - (f) Selbstkonsistente Lösung unter Berücksichtigung von Abschirmeigenschaften. d) Aufsicht auf die Ebene des 2DES in der Nähe des Probenrandes. Die schraffierten Flächen repräsentieren Gebiete mit nichtganzzahligem Füllfaktor (kompressibles 2DES), die nicht-schraffierten Gebiete repräsentieren 2DES mit ganzzahligem Füllfaktor (inkompressibles 2DES). e) Aufbiegen der Randkanäle entlang des (zum Rand hin) ansteigenden elektrostatischen Potentials. Die Kreise repräsentieren besetzte, teilweise besetzte und nicht-besetzte Landau-Niveaus. f) Ladungsträgerkonzentration als Funktion des Abstandes zum Probenrand.

Ladungsträgerkonzentration sich jeweils ohne Stufen um  $\Delta n = n_L$  ändert, getrennt durch relativ schmale inkompressible Randstreifen, wo die Ladungsträgerkonzentration konstant bleibt und das elektrische Feld des Einschlußpotentials wirkt.

Bei Rechnungen von Lier und Gerhardt [Lie94] wird insbesondere auf die Entwicklung der inkompressiblen Streifen in Abhängigkeit des angelegten Magnetfeldes eingegangen. Im Modell wird der Probenrand elektrostatisch durch ein Seitengate definiert, welches durch eine Spannung  $U_{SG}$  den Rand des 2DES verschiebt. Der Abstand eines inkompressiblen Streifens mit lokalem Füllfaktor  $\nu_l = k$  vom Rand des 2DES berechnet sich nach [Lie94] zu:

$$y_k = \frac{d_0}{1 - \left(\frac{k}{\nu}\right)^2} \quad (6.1)$$

mit

$$d_0 = \frac{4\epsilon\epsilon_{GaAs}U_{SG}}{\pi en}, \quad (6.2)$$

der Breite der Verarmungszone, in der die lokale Ladungsträgerkonzentration  $n_l = 0$  ist.

Die Breite der inkompressiblen Streifen ist gegeben durch

$$a_k = \frac{4y_k}{\nu} \sqrt{\frac{ka_B^*}{\pi d_0}}. \quad (6.3)$$

$a_B^* = 4\pi\epsilon\epsilon_{GaAs}\hbar^2/e^2m^* \approx 10$  nm ist der *effektive Bohr-Radius* in GaAs.

Bei den für die Messungen verwendeten Hall-Barren ist das 2DES hingegen durch eine geätzte Mesakante definiert. An den MESAflanken kommt es daher zu unvollständigen kovalenten Bindungen, an denen sich Elektronen anlagern können. Energetisch liegen diese Zustände etwa in der Mitte der Bandlücke, was zur Folge hat, daß die Fermi-Energie dort 'gepinnt' wird [Cha90, Sve92]. Zur Berechnung der Struktur aus Abbildung 6.2 wurde dies durch eine Seitengate-Spannung von  $U_{SG} = -0.7$  V approximiert.

Abbildung 6.2 zeigt die Entwicklung der inkompressiblen Streifen in der Nähe des Probenrandes als Funktion des Magnetfeldes im Lierschen Modell. Bei Magnetfeldern knapp unterhalb ganzzahliger Füllfaktoren wird der innerste inkompressible Streifen breiter und 'wandert' in Richtung Probenmitte, dem sogenannten *Bulk*<sup>1</sup>. Bei ganzzahligem Füllfaktor nimmt er das komplette Innere der Probe ein, welches somit inkompressibel ist. Die Breite der inkompressiblen Streifen beträgt bei Magnetfeldern knapp unterhalb ganzzahliger Füllfaktoren ca. 100 nm.

Zu beachten ist bei diesem Modell allerdings, daß es für ein ideales 2DES ohne eine räumliche Variation der Ladungsträgerkonzentration gerechnet wurde. Dies hat zur Folge, daß der innerste inkompressible Streifen nur bei exakt ganzzahligem Füllfaktor das gesamte Probeninnere einnimmt. In Abschnitt 2.4 wurde gezeigt, daß die Abweichung der lokalen Ladungsträgerkonzentration von der globalen bei den hier verwendeten Proben 10 % und mehr betragen kann. Dies bedeutet zum einen, daß die inkompressiblen Bereiche in der Realität breiter sind als in dieser Rechnung, zum anderen aber auch, daß nicht nur bei einem Magnetfeldwert der komplette innere Bereich des 2DES inkompressibel ist, sondern dieser Zustand über einen gewissen Magnetfeldbereich Bestand hat. Dies ist in Abbildung 6.2 zusätzlich angedeutet.

---

<sup>1</sup>Engl.: Masse, Mehrheit

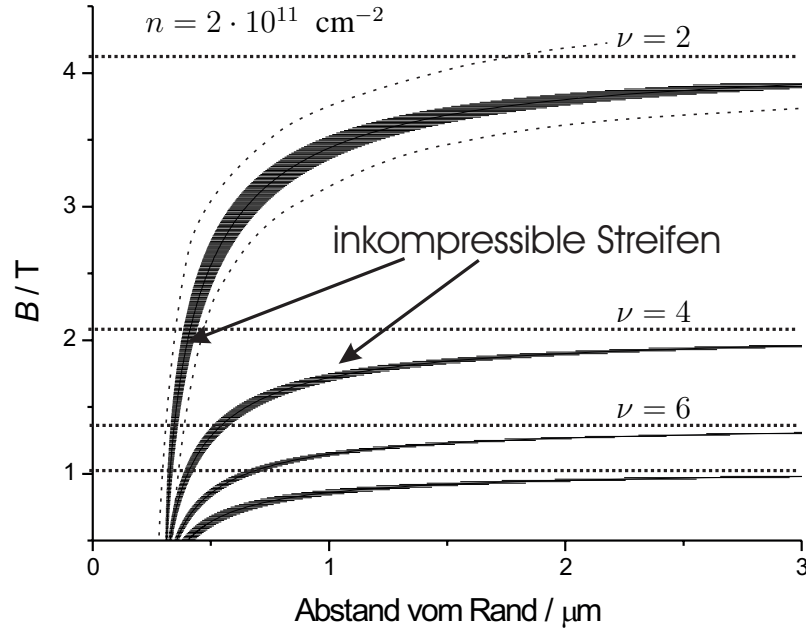


Abbildung 6.2: Entwicklung der inkompressiblen Streifen (unter Vernachlässigung der Spin-Aufspaltung) der Füllfaktoren  $\nu_l = 2, 4, 6$  und  $8$  mit dem Magnetfeld nach Gleichung 6.1. Die gestrichelten Linien stellen die Situation unter einer etwas realistischeren Betrachtungsweise exemplarisch am Streifen von Füllfaktor  $\nu_l = 2$  dar.

## 6.2 Detektion inkompressibler Streifen mit einem SET

Da der SET als Potentialsonde eine extreme Empfindlichkeit bietet, liegt es nahe, mit ihm die Eigenschaften des 2DES im Randbereich zu untersuchen. Die Größe der SET-Insel von nur ca. 150 nm bietet dabei eine hohe Ortsauflösung. Die Tatsache, daß ein SET in der Regel aufgedampft und damit ortsfest ist, kann damit umgangen werden, daß nicht der SET, sondern der Rand des 2DES mit einer Gate-Elektrode elektrostatisch verschoben wird. Dazu muß in der Nähe des SETs eine zusätzliche Steuerelektrode aufgedampft werden, welche den Rand des Hall-Barrens überlappt. Abbildung 6.3 zeigt diesen Aufbau: Der SET ist 11  $\mu\text{m}$  vom Rand der Mesa entfernt, die Steuerelektrode 'Seitengate' überlappt die Mesakante 10  $\mu\text{m}$ .

Eine quantitative Beschreibung des Problems 'Welche Seitengate-Spannung verschiebt den Rand des 2DES um wieviel' liefert der theoretische Artikel von *Larkin und Davies* [Lar95]. Das Elektronensystem befindet sich in ihren Überlegungen in der x-y-Ebene eines unendlich ausgedehnten Koordinatensystems. Eine Gate-Elektrode nimmt die gesamte negative x-y-Halbebene ( $y < 0$ ) in der Höhe  $z = z_{2DES}$  ein.

Das Anlegen einer negativen Spannung  $U_{SG}$  an dieses Seitengate wird also bei kleinen Spannungen die Ladungsträgerkonzentration in der negativen Halbebene verringern. Ist die Ladungsträgerkonzentration unterhalb des Gates gleich null, so wird eine weitere Steigerung der (negativen) Spannung  $U_{SG}$  den Rand des 2DES in die positive Halbebene verschieben.

Als realistisches Modell für tiefe Temperaturen wird das *frozen surface* Modell eingeführt. Es

geht davon aus, daß Oberflächenladungen nicht von der Seitengate-Spannung beeinflusst werden. Der Bezug zwischen lokalem chemischen und elektrostatischen Potential und der Ladungsträgerkonzentration wird über eine *Thomas-Fermi-Näherung* hergestellt. Die Spannung, ab welcher das 2DES unterhalb der Gate-Elektrode vollständig verarmt ist, hängt von der Ladungsträgerkonzentration  $n$  und dem vertikalen Abstand des 2DES zum Gate ab:

$$U_{SG}^0 = -\frac{ne z_{2DES}}{\epsilon \epsilon_{GaAs}}. \quad (6.4)$$

Sie beträgt bei den hier verwendeten Heterostrukturen etwa  $U_{SG}^0 = -0.25$  V.

Der SET aus Abbildung 6.3 wurde so positioniert, daß er bei 'ausgeschaltetem' Seitengate mit einer Entfernung von  $11 \mu\text{m}$  zur Mesakante im Bulk des 2DES liegt und bei eingeschaltetem Seitengate ( $U_{SG}^0 = -0.25$  V) mit einer Entfernung von einem Mikrometer direkt an der Grenze des Bereichs, in dem das Einschlußpotential des Randes zu wirken beginnt.

Unter anderem kann aus den Berechnungen von Larkin und Davies noch die Verschiebung der Verarmungszone  $d_0$  als Funktion der Seitengate-Spannung  $U_{SG}$  berechnet werden. Für diese gilt:

$$d_0(U_{SG}) = \frac{z_{2DES}}{\pi} \left[ 2 \left( \frac{U_{SG}}{U_{SG}^0} - 1 \right) + \ln \left( 2 \frac{U_{SG}}{U_{SG}^0} - 1 \right) + 1 \right] \quad (6.5)$$

$$\approx \frac{2z_{2DES}}{\pi} \frac{U_{SG}}{U_{SG}^0} \quad \text{für } U_{SG} > 2U_{SG}^0. \quad (6.6)$$

Die lineare Näherung erscheint auf der einen Seite vielleicht etwas grob. Auf der anderen Seite aber gibt es zu viele weitere Unbekannte, die noch in einer realen Probe stecken<sup>2</sup>, so daß eine solche Näherung doch sinnvoll erscheint (vgl. Abbildung 6.3 unten).

In Abbildung 6.4 ist die Änderung der Rückkoppelspannung  $U_{FB}$  eines SETs, der  $1 \mu\text{m}$  von einem Seitengate entfernt ist, in Abhängigkeit von der Seitengate-Spannung  $U_{SG}$  gezeigt. Der gleichzeitig mitgemessene Strom  $I_{SET}$  durch den Transistor war während der Messung konstant, was beweist, daß die Rückkoppelschleife während der Messung problemlos funktioniert hat.

Eigentlich würde man erwarten, daß Änderungen in  $U_{FB}$  nur die Änderungen des elektrostatischen Potentials im Randbereich widerspiegeln. Allerdings braucht man schon sehr viel Phantasie, um die Meßkurve  $U_{FB}(U_{SG})$  aus Abbildung 6.4 mit den Ergebnissen von Chklovskii *et al.* [Chk92] (Abb. 6.1) in Verbindung zu bringen.

Der Grund für diese Abweichung ist in der Wechselwirkung zwischen Seitengate und der SET-Insel zu suchen. Mit nur einem Mikrometer Entfernung zur Insel wirkt das Seitengate neben dem 2DES als zweite Gate-Elektrode direkt auf den SET. Änderungen in der Seitengate-Spannung ändern somit auch das elektrostatische Potential der Elektronen auf der SET-Insel. Diese Änderungen werden von der Rückkoppelschleife kompensiert und während einer Messung registriert. Allerdings ist die Wirkung des Seitengates durch die abschirmenden Eigenschaften der kompressiblen Bereiche des 2DES wesentlich geschwächt, und die SET-Insel koppelt vorwiegend an das 2DES. Diese Abschirmung schwächt sich mit zunehmender (negativer) Gate-Spannung, da der Bereich mit kompressiblem 2DES zwischen Insel und Seitengate immer schmaler wird, je weiter der Rand in Richtung SET geschoben wird. Des weiteren verkleinert sich auch noch die Kapazität

<sup>2</sup>Als Beispiel sei hier die Verspannung aufgeführt, die durch die unterschiedlichen Ausdehnungskoeffizienten zwischen Aluminium und GaAs auftritt. Des weiteren können Thermospannungen auftreten, die sich unbemerkt zur Gate-Spannung addieren.

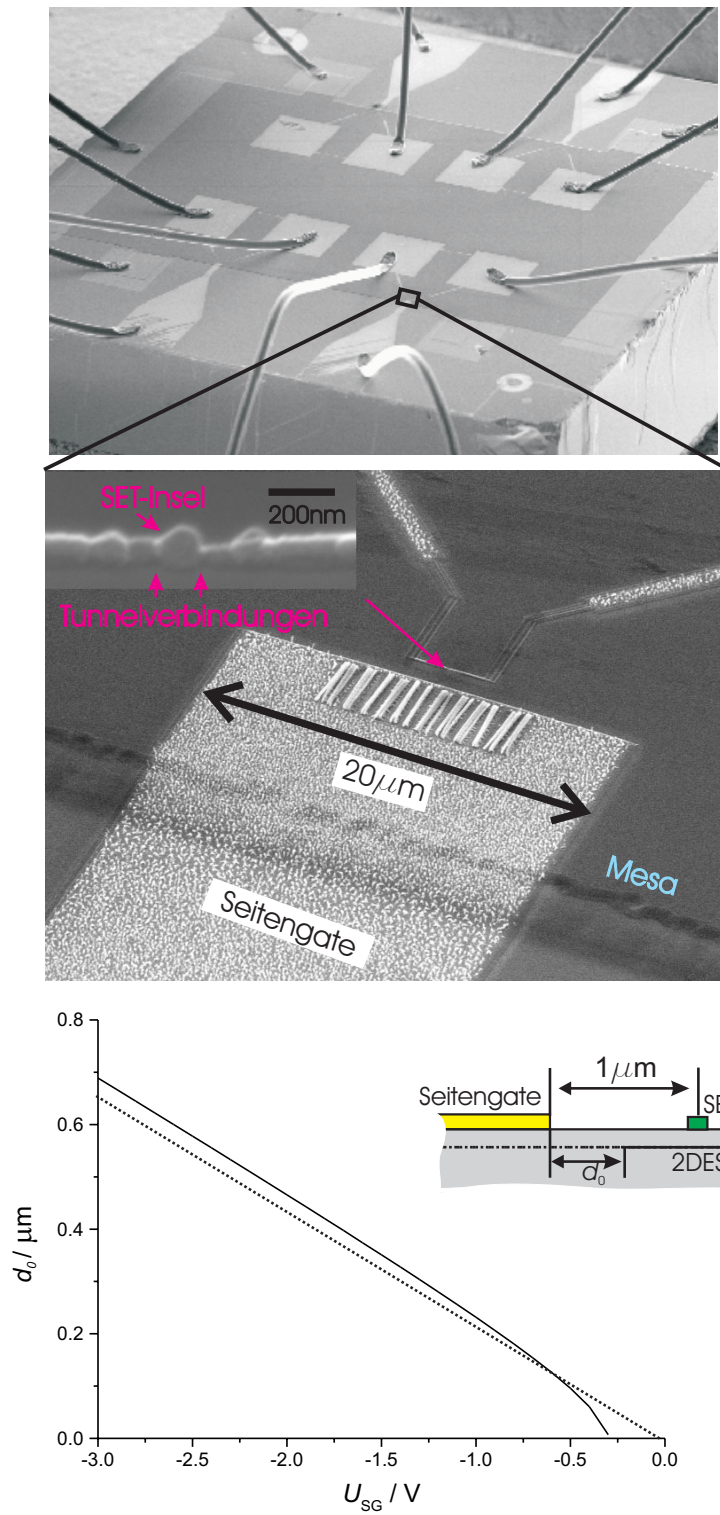


Abbildung 6.3: Oben: REM-Aufnahme einer Probe mit vier SETs auf einem Hall-Barren. Unten: Abstand des Randes des 2DES als Funktion der Seitengate-Spannung  $U_{SG}$  nach Gleichung 6.5 und lineare Näherung (gestrichelte Gerade) nach Gleichung 6.6.

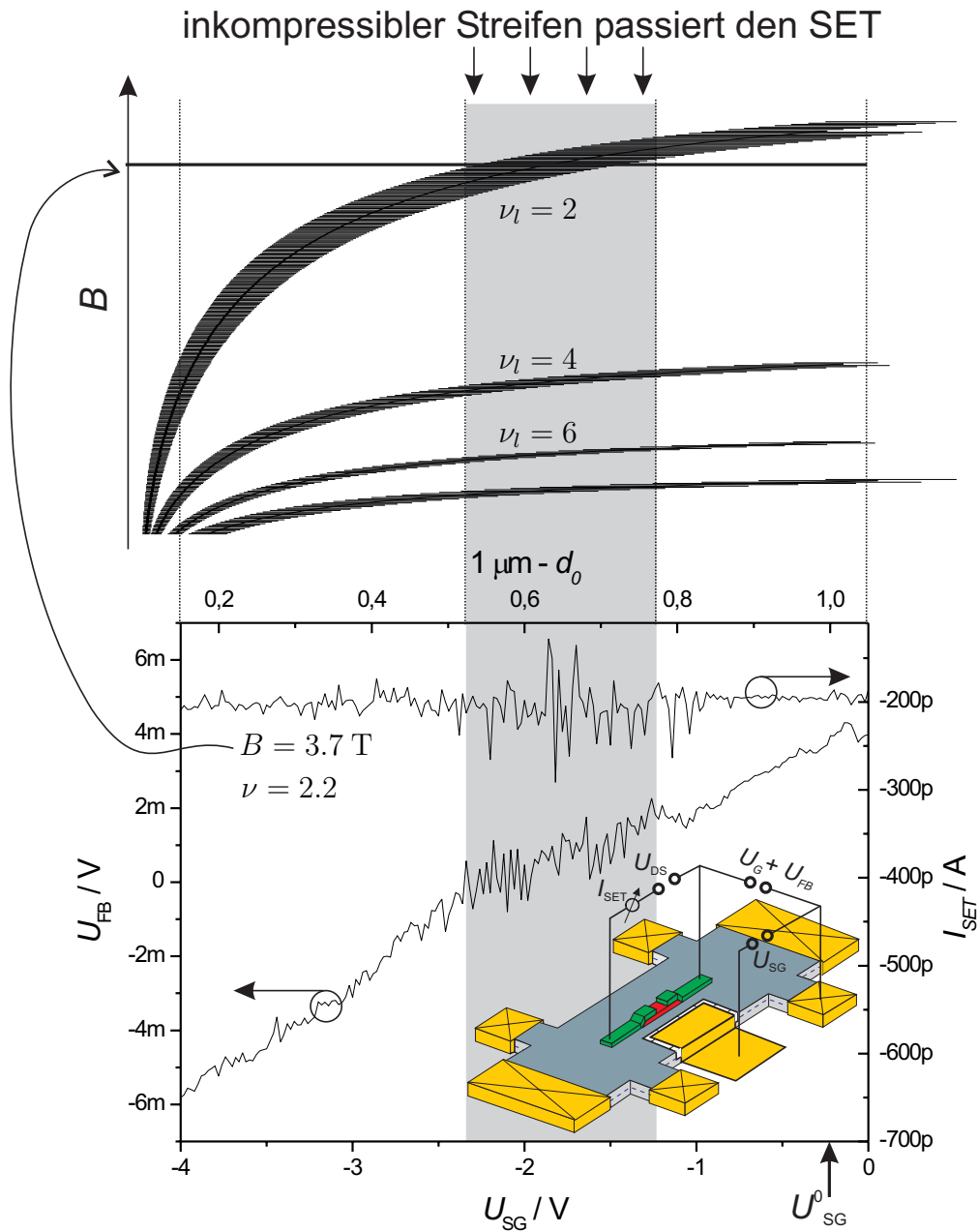


Abbildung 6.4: Spannungsänderung  $U_{FB}$  der Rückkoppelschleife und Stromfluß  $I_{SET}$  durch den SET in Abhängigkeit der Seitengate-Spannung  $U_{SG}$  bei einem Magnetfeld knapp unterhalb des ganzzahligen Füllfaktors  $\nu = 2$ . Ab  $U_{SG} = U_{SG}^0 = -0.25$  V befindet sich der SET in einer Entfernung von  $1 \mu\text{m}$  zum Rand des 2DES. Eine Erhöhung der (negativen) Seitengate-Spannung  $U_{SG}$  schiebt die Randverarmungszone mit dem innersten inkompressiblen Streifen ( $\nu_l = 2$ ) weiter in Richtung SET. Dieser Streifen passiert im Bereich  $-1.25 \text{ V} > U_{SG} > -2.4 \text{ V}$  den Detektionsbereich des SETs, was sich durch ein erhöhtes Rauschen in den Meßkurven  $I_{SET}(U_{SG})$  und  $U_{FB}(U_{SG})$  ausdrückt.

zwischen Insel und 2DES mit dem Verschieben des 2DES-Randes. Bei  $U_{SG} = 0$  liegt die SET-Insel noch über ein in alle Richtungen weit ausgedehntes 2DES. Ist aber der Rand des 2DES bis zur Position der Insel verschoben, so hat sich eine Kondensatorfläche extrem verkleinert, und die Kapazität  $C_G$  verkleinert sich. Diese Änderung ist nicht besonders stark, konnte aber mit  $\Delta C_G \approx 10\%$  aus einer Veränderung der Frequenz der CBOs nachgewiesen werden. Bedenkt man aber andererseits, daß der Einfluß des Seitengates proportional  $C_{SG}/C_G$  ist, so wird deutlich, daß auch diese Änderungen in  $U_{FB}(U_{SG})$  mitgemessen werden.

Das Magnetfeld der Messung aus Abbildung 6.4 war so eingestellt, daß der Füllfaktor  $\nu = 2.2$  betrug. Es sollte also die Situation vorliegen, daß der innerste inkompressible Streifen sich schon deutlich vom Rand entfernt hat, aber noch nicht das gesamte Innere der Probe einnimmt.

Und dies ist auch genau das, was der SET detektiert. Im Bereich  $0 > U_{SG} > -1.25$  V ist die Kurve  $U_{FB}(U_{SG})$  sehr glatt. Unterhalb des SETs befindet sich kompressibles 2DES, der Strom durch den Transistor kann sehr gut von der Rückkoppelschleife kontrolliert werden. Im Bereich  $-1.25$  V  $> U_{SG} > -2.4$  V sieht man starkes Rauschen, sowohl in  $U_{FB}(U_{SG})$ , als auch in  $I_{SET}(U_{SG})$ . Dies deutet darauf hin, daß sich ein inkompressibles 2DES unter dem SET befindet. Das Elektronensystem hat sehr schlechte Abschirmeigenschaften und der SET reagiert auf Ladungsträgerfluktuationen in seiner Nähe. Weiteres Erhöhen der (negativen) Seitengate-Spannung 'schiebt' wieder kompressibles 2DES unter den SET, und die Kurve ist wieder glatt. Es wurde also durch die Variation der Seitengate-Spannung ein inkompressibler Streifen unter dem Transistor durchgeschoben.

Des weiteren sieht man hier, daß Gleichung 6.5 wirklich nur als Abschätzung zu sehen ist. Für eine Seitengate-Spannung von  $U_{SG} = -4$  V wäre eigentlich eine größere Verschiebung zu erwarten, als es offensichtlich der Fall ist. Dies liegt unter anderem auch an der kapazitiven Kopplung des Seitengates an den SET und seinen Zuleitungen, die in den Berechnungen von [Lar95] natürlich nicht enthalten sind. Der Transistor liegt elektrisch auf 'Masse' und ist somit für das Seitengate eine zweite Kondensatorfläche, bis zu welcher der Rand maximal verschoben werden kann.

Um die inkompressiblen Streifen besser auflösen zu können, wurden viele Messungen  $U_{FB}(U_{SG})$  bei einer schrittweisen Variation des Magnetfeldes durchgeführt (siehe Abb. 6.5). Eine Ableitung des Signals hebt die inkompressiblen Bereiche deutlich hervor. Man sieht, wie sich bei Magnetfeldern knapp unterhalb ganzzahliger Füllfaktoren der innerste inkompressible Streifen vom Probenrand entfernt, um dann bei ganzzahligem Füllfaktor das Probeninnere einzunehmen. Inkompressible Streifen lassen sich so bis zu Füllfaktor  $\nu = 18$  nachweisen.

Dieser Struktur ist noch eine zweite Streifenstruktur überlagert, die scheinbar in die entgegengesetzte Richtung verläuft. Es dürfte sich hierbei um eine oder mehrere Störstellen handeln, die in Abhängigkeit von Rückkoppel- und Seitengate-Spannung be- oder entladen werden. Darauf deutet auch hin, daß diese Linien schon im Bereich  $-0.3$  V  $< U_{SG} < 0$  schieben, während sich die Position der den inkompressiblen Streifen zugeschriebenen Linien noch nicht verändert, da der Rand des Elektronensystems sich in diesem Spannungsintervall noch nicht verschiebt. Bei kleinen Magnetfeldern und hohen Füllfaktoren hat aber diese Substruktur einen positiven Effekt. Eine Überlagerung beider Strukturen verstärkt das visuelle Erscheinen der inkompressiblen Streifen, die bei einer saubereren Probe bei diesen kleinen Magnetfeldern wohl nicht sichtbar wären.

Qualitativ betrachtet stimmt dieses Resultat sehr gut mit den Vorhersagen von Lier und Gerhardt [Lie94] überein. Die Breite der Streifen ist allerdings, wenn man die Formel von [Lar95] anwendet, mit etwa 250 nm ungefähr doppelt so breit, wie in [Lie94] vorhergesagt. Es spricht demnach dafür, daß die inkompressiblen Streifen - wie bereits angesprochen - breiter sind, als von



Lier und Gerhardtts [Lie94] berechnet.

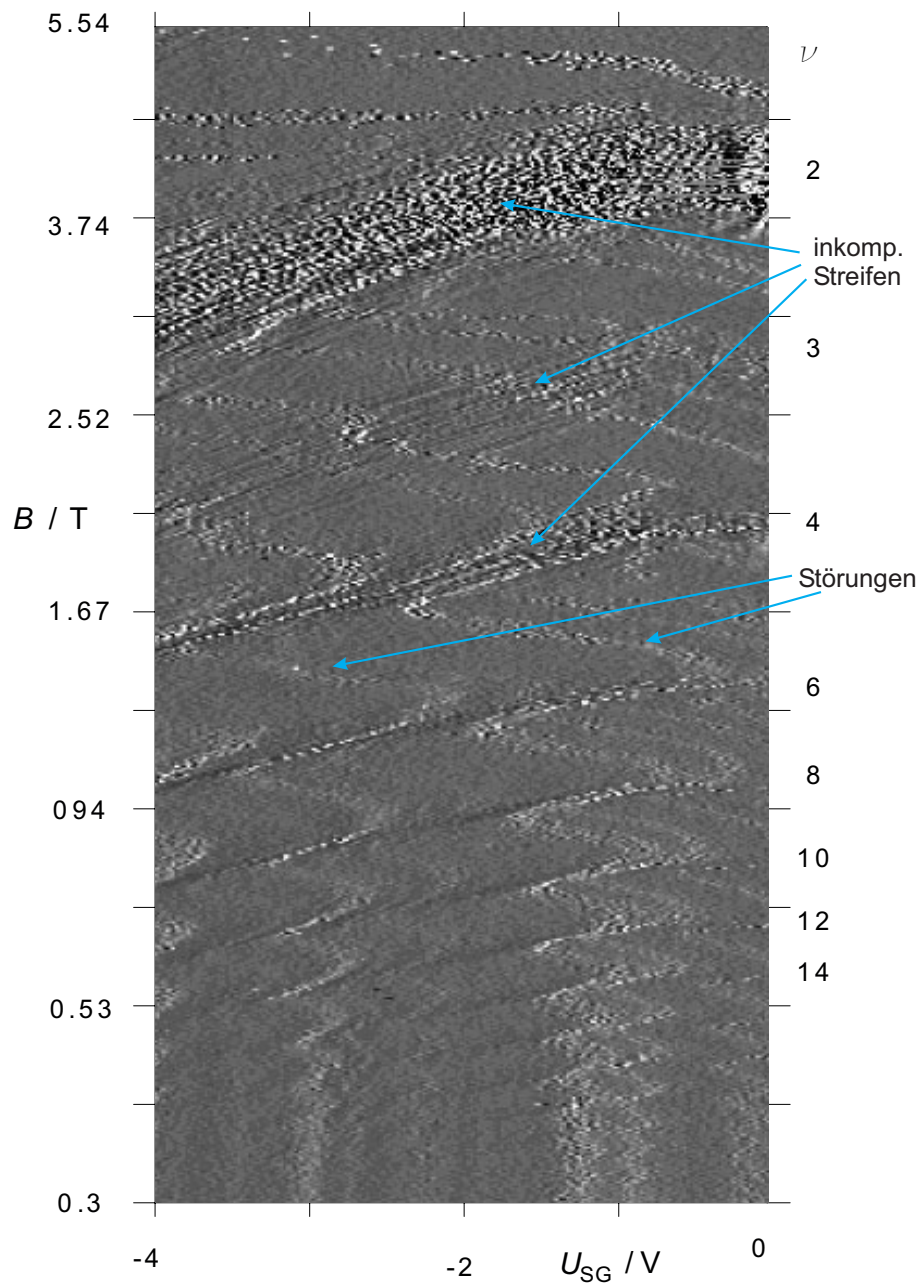


Abbildung 6.5: Ableitung  $dU_{FB}/dU_{SG}$  der Rückkoppelspannung bei unterschiedlichen Magnetfeldern und einer Temperatur von  $T = 25$  mK. Die Schrittweite des Magnetfeldes wurde von Schritt zu Schritt linear erhöht, um bei kleineren Magnetfeldern eine höhere Auflösung zu erhalten. Fluktuationen im Signalverlauf spiegeln die Entwicklung der inkompressiblen Streifen wider.

### 6.3 Einfluß der Temperatur auf die inkompressiblen Streifen

In den Rechnungen von Lier und Gerhardts [Lie94] wurde auch der Einfluß einer endlichen Temperatur auf die Ausbildung der kompressiblen und inkompressiblen Streifen berücksichtigt. Der Verlauf des Einschlußpotentials bei unterschiedlichen Temperaturen ist in Abbildung 6.6 gezeigt. Der Verlauf des elektrostatischen Potentials über die kompressiblen Streifen ist nie ganz flach, sondern variiert immer in der Größenordnung  $k_B T$ . Erst bei extrem tiefen Temperaturen oder großen Magnetfeldern ( $k_B T / \hbar \omega_c \leq 0.01$ ) wirkt es flach. Bei einem Magnetfeld von 4 Tesla entspricht dies einer Temperatur unterhalb von etwas mehr als einem Kelvin. Für ein deutliches 'Aufschmelzen' der kompressiblen Randbereiche bedarf es laut [Lie94] einer Temperatur entsprechend der Bedingung  $k_B T / \hbar \omega_c \geq 0.06$ , was bei  $B = 4$  T einer Temperatur von etwa fünf Kelvin entspricht.

Der SET, mit dem die in Abbildung 6.4 und 6.5 gezeigten Messungen durchgeführt worden sind, hatte hinreichend kleine Abmessungen, daß selbst bei  $T = 500$  mK noch ausgeprägte CBOs meßbar waren. Dies ermöglicht den Einsatz der Rückkoppelschleife, ohne daß sich die hohe Arbeitstemperatur auf die Empfindlichkeit des Transistors auswirkt. Abbildung 6.7 zeigt  $U_{FB}(U_{SG})$  bei  $T = 25, 200$  und  $500$  mK, also einer Variation der Temperatur um Faktor 20. Da, wie schon erläutert, der Verlauf des Einschlußpotentials nicht richtig aufgelöst werden kann, sieht man hier natürlich auch kein Aufschmelzen der *kompressiblen* Bereiche, wie es in Abbildung 6.6 skizziert ist. Was man aber dennoch sehr deutlich sieht ist, daß die *inkompressiblen* Bereiche bei höherer Temperatur immer schmaler und weniger ausgeprägt werden.

Mit jeder Änderung des Magnetfeldes oder der Seitengate-Spannung stellt sich eine neue Gleichgewichtssituation ein, was auch bedingt, daß sich lokalisierte Ladungsträger innerhalb der inkompressiblen Streifen umverteilen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Tunnelprozeß von einem

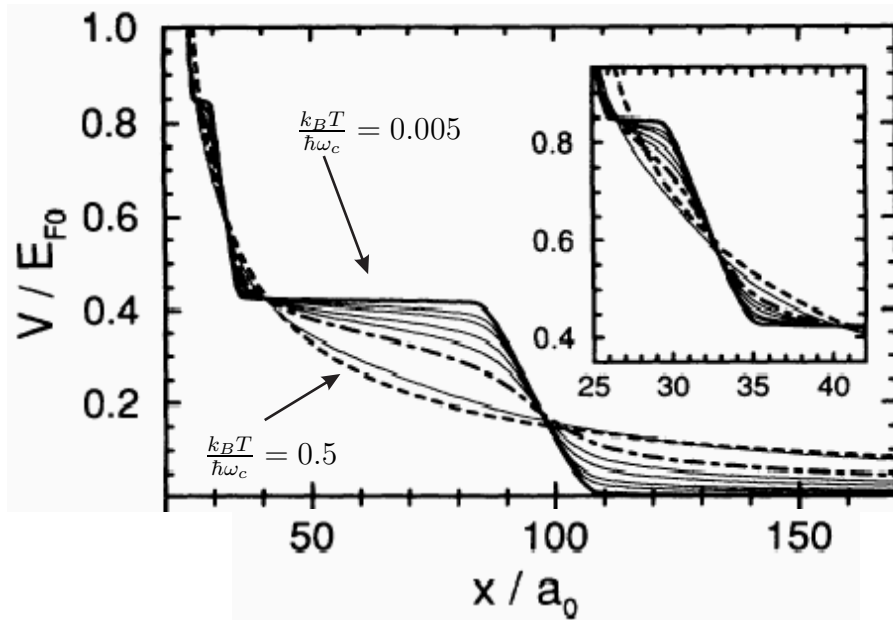


Abbildung 6.6: Einschlußpotential am Rand eines 2DES bei unterschiedlichen Temperaturen nach [Lie94]. Die Temperatur variiert von  $\frac{k_B T}{\hbar \omega_c} = 0.005$  über 0.02, 0.03, 0.05, 0.07, 0.1, 0.2 nach  $\frac{k_B T}{\hbar \omega_c} = 0.5$ . Der Füllfaktor beträgt  $\nu = 4.73$ , die Abszisse ist in Einheiten von  $a_0 = a_B^*/2$  aufgetragen.

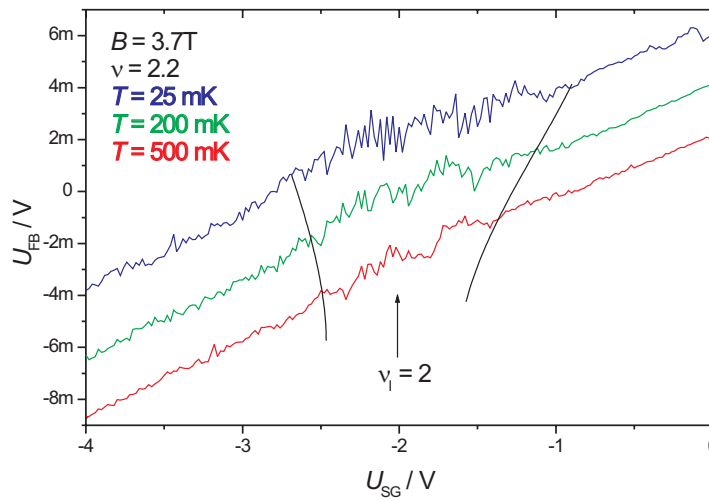


Abbildung 6.7: Spannungsänderung  $U_{FB}$  der Rückkoppelschleife in Abhängigkeit der Seitengate-Spannung  $U_{SG}$  bei einem Magnetfeld knapp unterhalb eines ganzzahligen Füllfaktors und drei verschiedenen Temperaturen.

lokalisierten Zustand in einen anderen ist proportional zu  $e^{k_B T}$  (siehe z. B. [Iba99]). Demnach sollten bei höheren Temperaturen Tunnelprozesse wesentlich wahrscheinlicher werden, was einen schnelleren Ausgleich verbunden mit weniger registrierbaren Ladungsträgerfluktuationen (weniger Rauschen) bewirkt (vgl. Abbildung 6.7).

In Abbildung 6.8 ist genau wie in Abbildung 6.5 die Ableitung des Rückkoppelsignals über die Seitengate-Spannung für unterschiedliche Magnetfelder aufgetragen. Die Meßreihen wurden bei den Temperaturen  $T = 200$  mK und  $T = 500$  mK aufgenommen und unterscheiden sich nur marginal. Ein Unterscheidungsmerkmal ist, daß bei der rechten Grafik ( $T = 500$  mK) die Substruktur zwischen den inkompressiblen Streifen wesentlich stärker zum Vorschein kommt. Dies ist darauf zurückzuführen, daß sich diese Bereiche in ihrer Intensität kaum verändert haben, während sich das durch die Ladungsträgerfluktuationen in den inkompressiblen Streifen bedingte Rauschen deutlich abgeschwächt hat.

## 6.4 Zusammenfassung

Mit einem sich am Rand eines Hall-Barrens befindlichen SET wurde das Verhalten kompressibler und inkompressibler Bereiche eines 2DES im ganzzahligen Quanten-Hall-Regime untersucht.

Durch das Anlegen einer negativen Spannung an eine zusätzliche Steuerelektrode konnte der Rand des 2DES elektrostatisch verschoben werden. Mit Hilfe von Messungen, bei denen bei unterschiedlichen Magnetfeldern der Rand des 2DES in der Nähe des SETs verschoben wurde, konnte so die räumliche Entwicklung der kompressiblen und inkompressiblen Bereiche mit dem Magnetfeld untersucht werden. Aufgrund der hohen Empfindlichkeit des eingesetzten SETs konnten inkompressible Bereiche selbst bei Magnetfeldern unterhalb von 0.5 T noch nachgewiesen werden. Messungen bei höheren Temperaturen zeigen ein bisher nur theoretisch vorhergesagtes Aufschmelzen der *inkompressiblen* Bereiche.

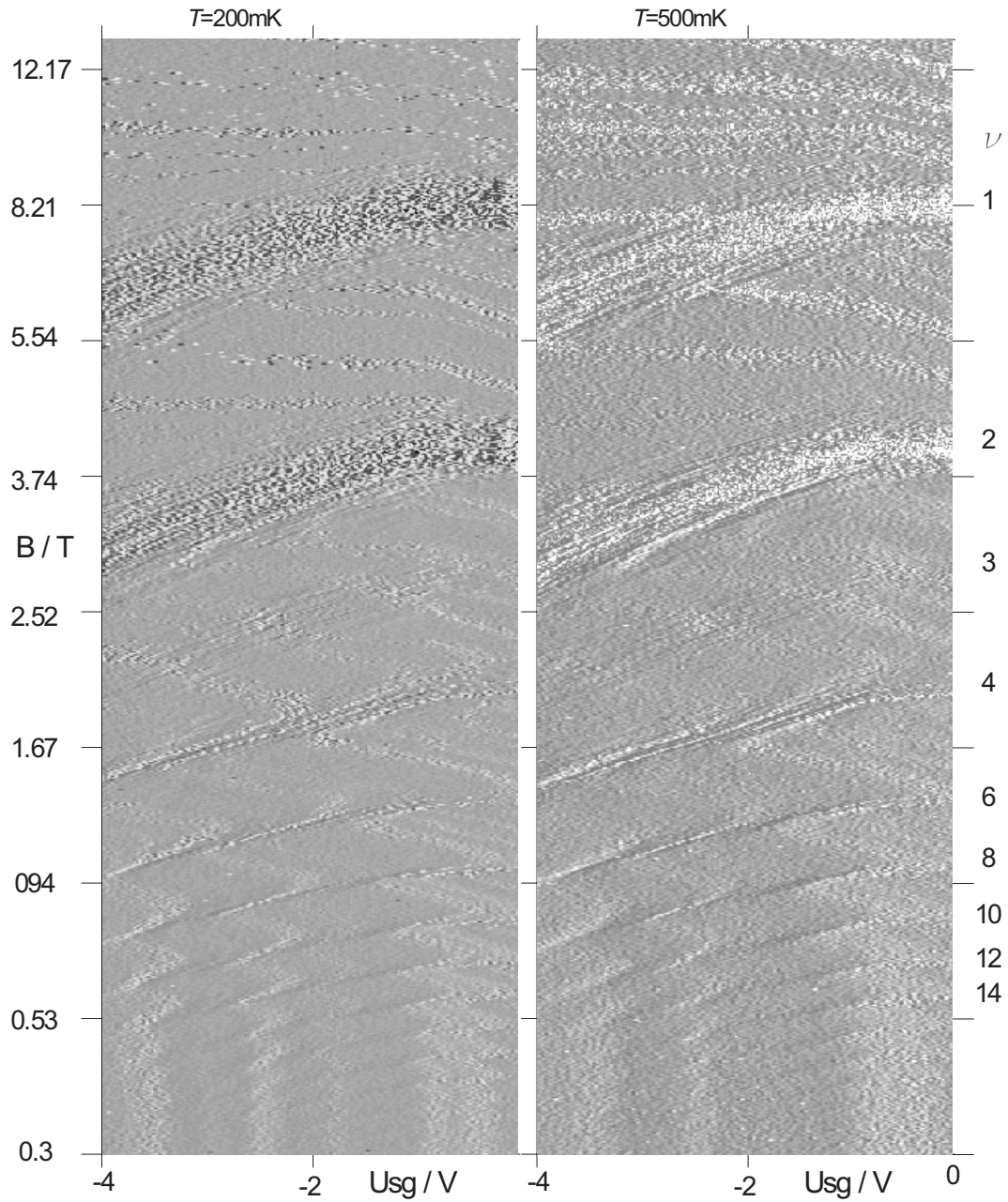


Abbildung 6.8: Ableitung  $dU_{FB}/dU_{SG}$  der Rückkoppelspannung bei unterschiedlichen Magnetfeldern und einer Temperatur von  $T = 200$  mK, bzw. 500 mK. Die Schrittweite des Magnetfeldes wurde von Schritt zu Schritt linear erhöht, um bei kleineren Magnetfeldern eine höhere Auflösung zu erhalten. Fluktuationen im Signalverlauf spiegeln die Entwicklung der inkompressiblen Streifen wider.

# Kapitel 7

## Nichtgleichgewichtsphänomene

Dieser Teil meiner Arbeit beschäftigt sich mit Nichtgleichgewichtsphänomenen, induziert durch eine Variation (*engl.: Sweep*) des Magnetfeldes. Solche Effekte wurden bislang in Magnetisierungsmessungen [Jon95, Jon97, sch02, Wat98] oder als elektrostatische Potentialdifferenz zwischen den beiden Kontakten einer Corbino-Scheibe nachgewiesen [Dol90, Dol92, Dol01].

Ausgangspunkt für die Experimente von Dolgoplov *et al.* [Dol90, Dol92, Dol01] war das *laughlinsche Gedankenexperiment* [Lau82]. In diesem Gedankenexperiment wird ein Streifen 2DES zu einem schmalen Zylinder aufgerollt (vgl. Abb. 7.1). Ein statisches Magnetfeld  $B$  durchdringt den Streifen überall senkrecht zur Oberfläche. Eine Hall-Spannung  $U_H$  wird zwischen beiden Rändern angelegt und sorgt für einen dissipationsfrei fließenden Strom  $I$  im 2DES.

Parallel zur Spulenachse durchdringt das System ein magnetischer Fluß  $\Phi$ . Zur Änderung dieses Flusses bedarf es der Energie  $\Delta E = I\Delta\Phi$ , die dadurch aufgebracht wird, daß eine Ladung  $\Delta q$  im Hall-Feld von einer Seite des Streifens zur anderen transferiert wird:

$$\Delta E = I\Delta\Phi = \Delta q U_H . \quad (7.1)$$

Eine Änderung des magnetischen Flusses ändert die Phase der Elektronen-Wellenfunktionen im 2DES. Wird der Fluß um ein ganzes Flußquant  $\Phi_0$  variiert, so beträgt die Phasenverschiebung  $2\pi$ , und die Wellenfunktionen werden wieder in sich selbst überführt. Gleichzeitig wurde ein Elektron

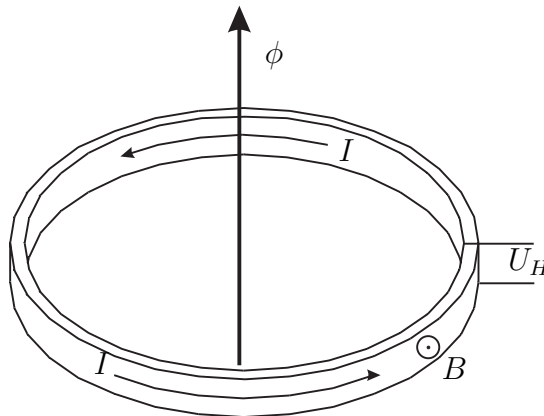


Abbildung 7.1: Das laughlinsche Gedankenexperiment [Lau82].



über den Streifen transferiert. Die Hall-Spannung bleibt dabei konstant auf dem Wert:

$$I\Phi_0 = eU_H, \quad (7.2)$$

$$I = \frac{e^2}{h} U_H. \quad (7.3)$$

Betrachtet man ein 2DES mit  $\nu$  besetzten Landau-Niveaus als  $\nu$  parallelgeschaltete Streifen, in denen jeweils ein Elektron pro Flußquant transferiert wird, so gilt dementsprechend:

$$I = \nu \frac{e^2}{h} U_H. \quad (7.4)$$

In dem 2DES gilt daher:  $\sigma_{xx} = 0$ ,  $\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$ .

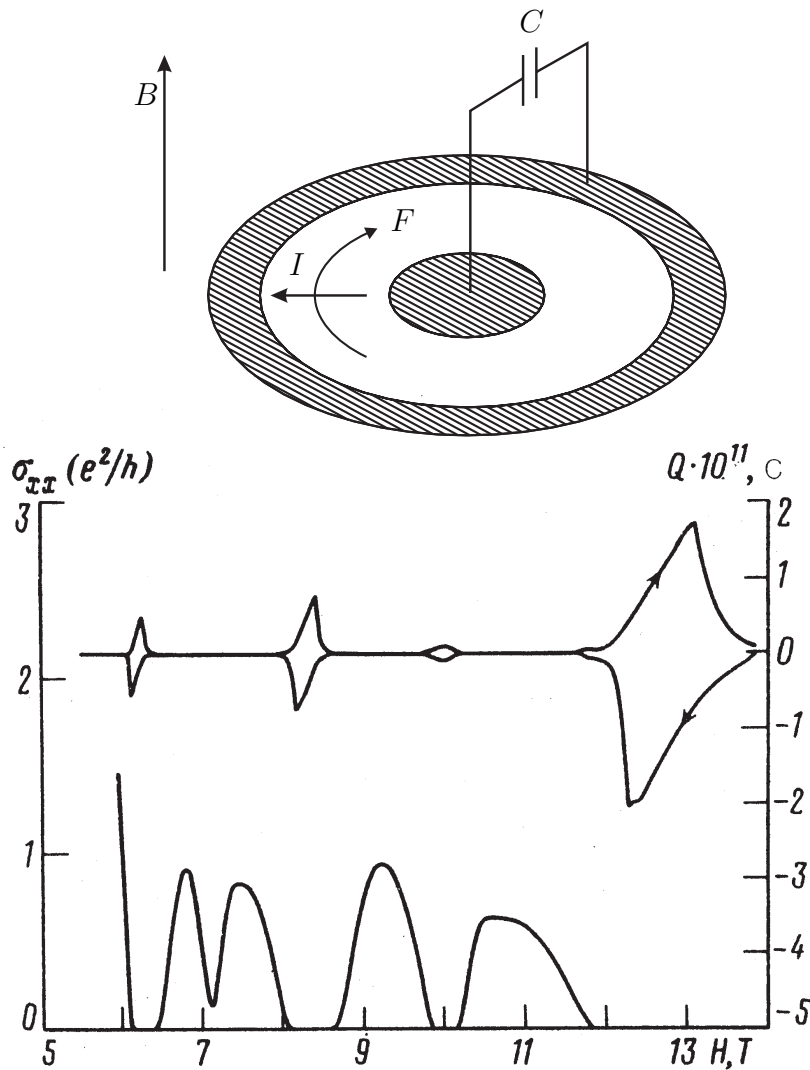


Abbildung 7.2: Das Experiment von Dolgoplov *et al.* [Dol90]. An die beiden Kontakte einer Corbino-Scheibe wird ein Kondensator angeschlossen. Die zeitliche Variation des Magnetfeldes bewirkt ein azimuthales elektrisches Feld, welches im Bereich ganzzahliger Füllfaktoren einen radialen Strom treibt, der den Kondensator auflädt.

Die Tatsache, daß im Quanten-Hall-Regime  $\sigma_{xx} = 0$  gilt, läßt sich sehr einfach dadurch überprüfen, daß man eine Probe in Corbino-Geometrie herstellt und bei ganzzahligem Füllfaktor den Stromfluß über das 2DES bei vorgegebener Spannung mißt. Es fließt kein Strom, solange man mit der Spannung unterhalb kritischer Werte bleibt.

Die Hall-Leitfähigkeit  $\sigma_{xy}$  hingegen läßt sich wesentlich schwieriger bestimmen. Dolgoplov *et al.* nahmen Proben in Corbino-Geometrie (Abb. 7.2) und nutzten die Tatsache, daß ein von Null verschiedenes  $\dot{B}$  mit einem azimuthalen elektrischen (Wirbel) Feld  $F$  verbunden ist. Ist jetzt zwischen den beiden Kontakten der Corbino-Scheibe  $\sigma_{xx} = 0$  und  $\sigma_{xy} \neq 0$ , so sorgt das Feld  $F$  für einen radialen Strom mit der Stromdichte

$$J = \sigma_{xy} F \quad (7.5)$$

von innen nach außen oder umgekehrt, der einen Kondensator mit der Kapazität  $C$  aufladen kann. Wird der Sweep im Bereich eines QHE-Plateaus gestoppt, so bleibt die aufgebaute Spannung  $U = Q/C$  über den Kondensator über mehrere Minuten bis Stunden erhalten, da im 2DES die Längsleitfähigkeit  $\sigma_{xx}$ , die einen Leakagestrom ermöglicht, nahe null ist. In Abbildung 7.2 sind Ladungstransfer (obere Kurve) und  $\sigma_{xx}$  über das angelegte Magnetfeld aufgetragen. Die Pfeile geben die Sweeprichtung an. Nähert sich das Magnetfeld einem Bereich, in dem der Füllfaktor ganzzahlig und  $\sigma_{xx} = 0$  wird, so werden Ladungsträger über die Corbino-Scheibe transferiert. Die damit verbundene Spannung bleibt über lange Zeit aufrechterhalten, da die Längsleitfähigkeit verschwindend klein ist. Die Steigung  $dQ/dB$  ist dabei proportional zur Hall-Leitfähigkeit  $\sigma_{xy}$ . Am Ende eines Plateaubereiches, wo die Längsleitfähigkeit langsam wieder von Null verschieden wird, fließen diese Ladungsträger dann wieder zurück.

Aus der Steigung  $dQ/dB$  konnten Dolgoplov *et al.* die Hall-Leitfähigkeit  $\sigma_{xy}$  mit einem Fehler von  $\pm 5\%$  auf  $e^2/h$  multipliziert mit der Anzahl der besetzten Landau-Niveaus unterhalb der Fermi-Energie bestimmen [Dol90]. Dies unterstützt die Theorie, daß der Strom im Bereich ganzzahliger Füllfaktoren von ausgedehnten Zuständen unterhalb der Fermi-Energie getragen wird.

Mit einer radialen Spannungsdifferenz in einer Probe ist in Verbindung mit verschwindender Längsleitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  und endlichem  $\sigma_{xy}$  auch ein azimuthaler Wirbelstrom verknüpft. Mit der Stärke und dem Abklingverhalten solcher Wirbelströme beschäftigen sich die Arbeiten von Jones und Watts *et al.* [Jon95, Jon97, Wat98]. Sie klebten etwa  $1 \text{ cm}^2$  große Probenstücke auf ein Torsionsmagnetometer (Abb. 7.3). Das Torsionsmagnetometer besteht aus einem Stator und einem Rotor, die als Kondensator in eine Meßbrücke integriert sind. Der Rotor ist in einem Winkel von ca.  $20^\circ$  zum Stator über einen Draht aufgehängt, der als Torsionsfeder fungiert. Wird im 2DES jetzt ein Wirbelstrom induziert, so ändert sich der Winkel zwischen Rotor und Stator, und aus der Änderung der Kapazität kann das magnetische Moment des Wirbelstromes bestimmt werden. Abbildung 7.3 zeigt eine Skizze des Meßaufbaus und das Ergebnis einer Messung. Im Bereich ganzzahliger Füllfaktoren treten Wirbelströme auf, die ihr Vorzeichen mit der Sweeprichtung ändern.

In der ersten Veröffentlichung von Jones *et al.* [Jon95] wird spekuliert, daß die Wirbelströme in einem Streifen am äußersten Rand der Probe fließen, dessen Ausdehnung in der Größenordnung der magnetischen Länge  $l_b$  liegt. Diese Hypothese hätte extrem hohe kritische Stromdichten  $J_c$  zur Folge und wird inzwischen selbst von den Autoren dieser Arbeit kritisiert [Mat03]. Neuere von dieser Arbeitsgruppe publizierte Rechnungen [Kav03] schlagen einen Wirbelstrom vor, welcher sich über den gesamten Radius<sup>1</sup>  $r$  einer Probe erstreckt und bei  $\frac{r}{\sqrt{2}}$  die maximale Stromdichte

<sup>1</sup>Sie gehen von einem rotationssymmetrischen 2DES aus.

erreicht. Aufgrund der fehlenden Ortsauflösung in der von Jones *et al.* angewandten integrierenden Meßmethode, blieb eine experimentelle Bestätigung einer dieser Hypothesen bislang noch offen.

Die Hall-Spannung  $U_H$  eines Wirbelstromes  $I_W$  kann mit einem SET gemessen werden [Wei98a, Hül01]. Dies rührt daher, daß er zwischen dem Probenrand und dem Zentrum einer Probe mit dem angelegten Magnetfeld eine Hall-Spannung

$$U_H = R_{xy} \cdot I_W \quad (7.6)$$

erzeugt, bzw. durch diese getrieben wird. Es entsteht also eine elektrostatische Potentialdifferenz zwischen dem Rand und dem inneren Bereich (Bulk) des 2DES. Die in dieser Arbeit eingesetzten SETs haben mit ihrer sensitiven Fläche von ca.  $150 \times 150 \text{ nm}^2$  eine sehr hohe Ortsauflösung und bieten daher die Möglichkeit, Rückschlüsse auf die so induzierte Potentialverteilung zu ziehen. Großer Vorteil dieser Meßmethode ist dabei nicht nur die kleine Ausdehnung der SET-Inseln, sondern vor allem die Tatsache, daß eine kleine Modifikation der bereits vorgestellten Meßelektronik es ermöglicht, mit mehreren SETs gleichzeitig an unterschiedlichen Stellen einer Probe in Rückkoppeltechnik zu messen. Dies eröffnet die Möglichkeit, mittels Korrelationsmessungen zwischen globalen und lokalen Effekten zu unterscheiden, was in den bisherigen Messungen dieser Art [Wei98a, Hül01] nicht möglich war.

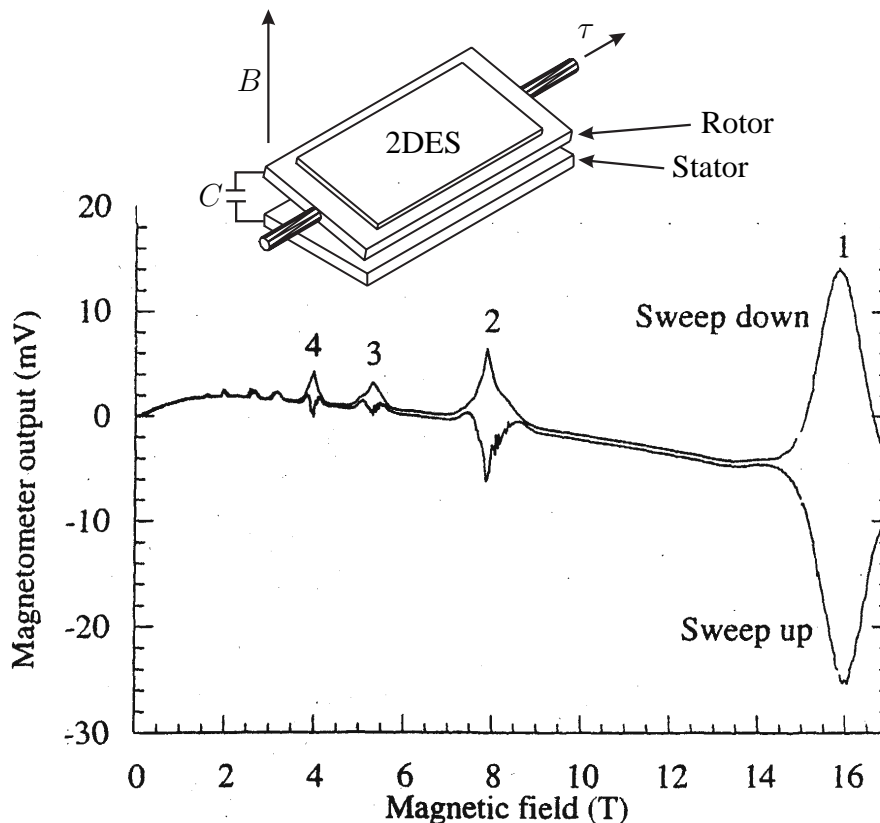


Abbildung 7.3: Das Experiment von Jones *et al.* [Jon95]. Auf einem Torsionsmagnetometer befindet sich eine Probe mit einem 2DES. Im Bereich ganzzahliger Füllfaktoren werden im 2DES Wirbelströme induziert, die über das entstandene magnetische Moment kapazitiv aus der Verdrehung der beiden Kondensatorplatten zueinander quantifiziert werden können.



## 7.1 Elektrostatische Potentialänderungen im 2DES

Um mit mehreren SETs simultan messen zu können, wurde der in Kapitel 5 vorgestellte Meßaufbau dahingehend verändert, daß nicht mehr die SET-Insel elektrostatisch auf Masse liegt, sondern die ohmschen Kontakte und damit der Rand des 2DES. Das Anlegen einer Gate-Spannung  $U_G$  ändert dann das elektrostatische Potential des SETs relativ zum 2DES, bzw. Masse. Abbildung 7.4 zeigt den schematischen Aufbau der modifizierten Meßschleife (*Typ II*). Prinzipiell kann mit dieser Technik mit beliebig vielen SETs unabhängig von einander in Rückkoppeltechnik gemessen werden. Allerdings ist bereits das gleichzeitige Messen mit zwei SETs sehr aufwendig, so daß der Bau weiterer Schaltungen vorerst zurückgestellt wurde.

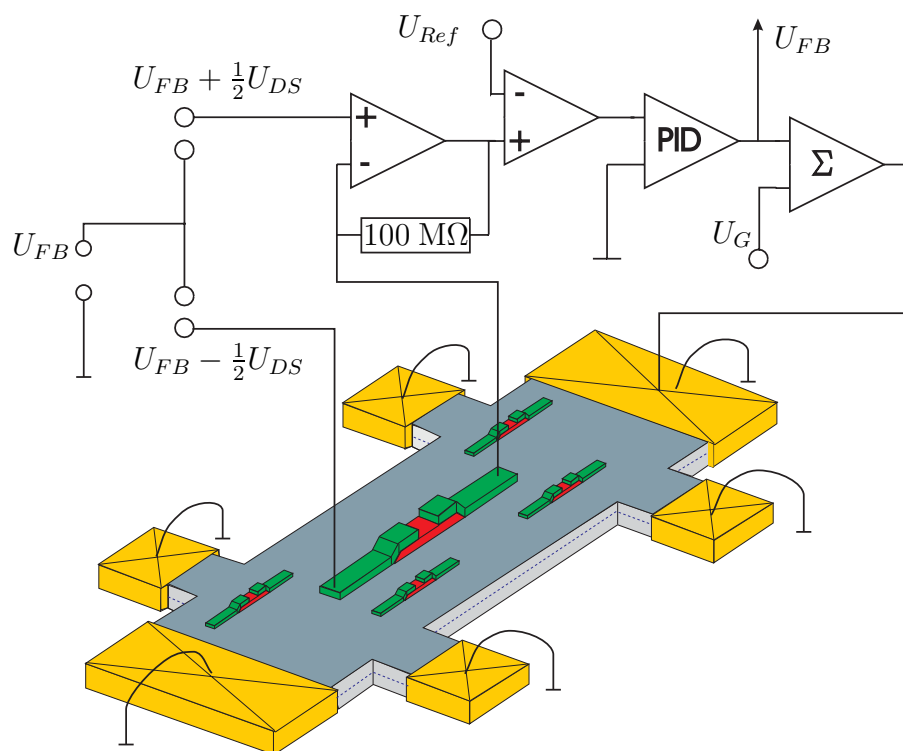


Abbildung 7.4: Modifizierte Meßelektronik (Typ II), die das unabhängige Messen mit mehreren SETs in Rückkoppeltechnik ermöglicht.

Nachteil dieser Schaltung im Vergleich zur alten ist, daß sie aufgrund ihrer Größe nicht mehr direkt auf den Probenspieß gesteckt werden kann. Unverstärkte Signale müssen daher durch längere Kabel zur Meßelektronik geleitet werden, was auch bei guter Abschirmung zwangsläufig das Signal/Rausch-Verhältnis verschlechtert. Des weiteren muß bei Messungen mit dieser Elektronik beachtet werden, daß die Rückkoppelspannung  $U_{FB}$  im Vergleich zur alten Schaltung (*Typ I*) das **umgekehrte Vorzeichen** hat, da sie nicht an das 2DES angelegt wird, sondern direkt das elektrostatische Potential der SET-Sonde variiert.

Abbildung 7.5 zeigt eine Messung der Rückkoppelspannung bei zeitlicher Variation des Magnetfeldes (vgl. Kapitel 5). Der Unterschied zu den Messungen aus Kapitel 5 ist der, daß hier der Magnetfeldbereich, über den sich die Messung erstreckt, zu höheren Feldern erweitert wurde. Bei höheren Magnetfeldern wird die Landau-Aufspaltung größer und der Quanten-Hall-Effekt tritt auf.

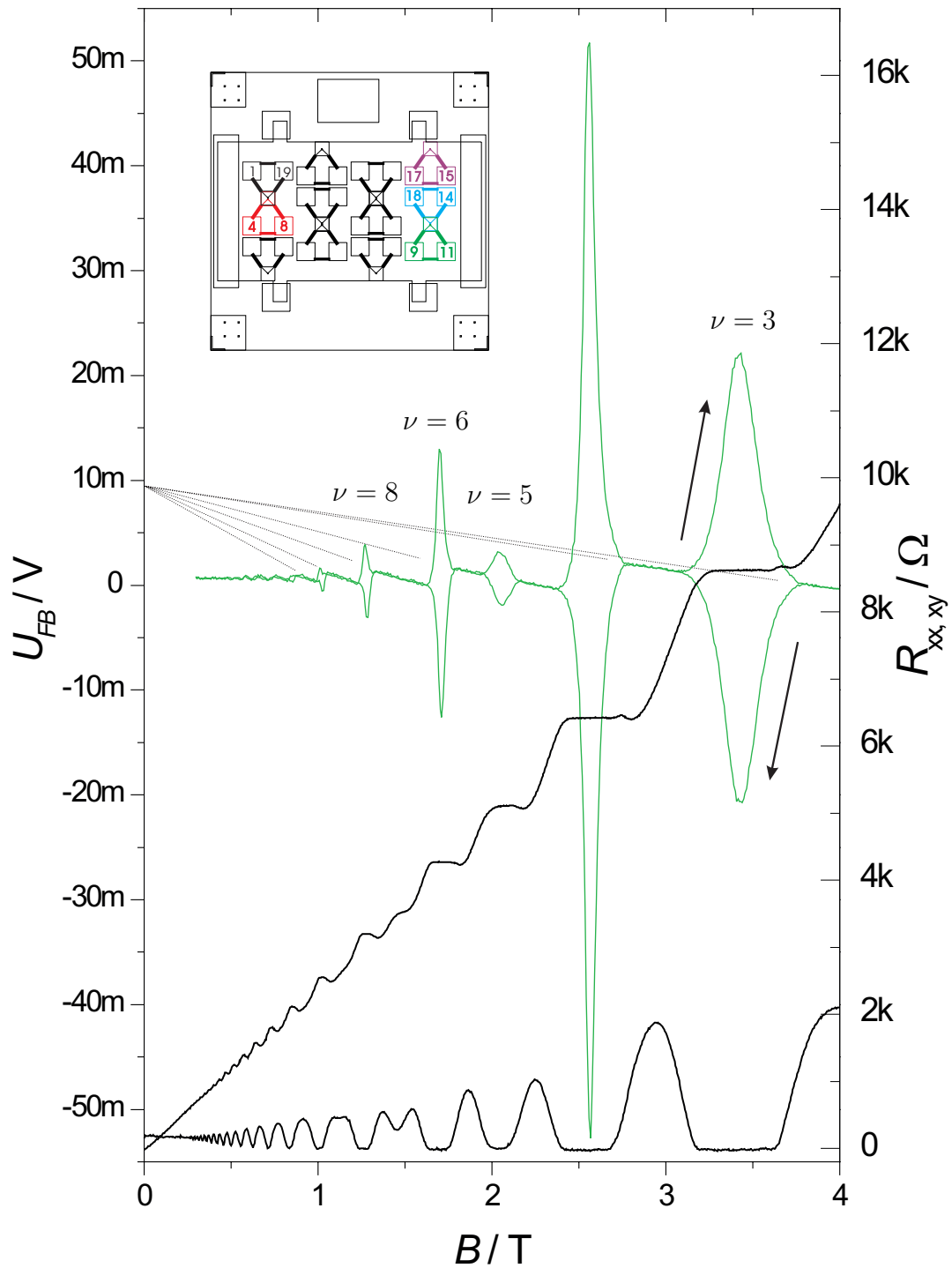


Abbildung 7.5: Signal der Rückkopplerschleife (grün, linke Ordinate) und Längs-, bzw. Querwiderstand der Probe (separat gemessen). Die Pfeile geben die Sweeprichtung des Magnetfeldes an. Diese Probe enthält fünf funktionsfähige SETs (farblich hervorgehoben), die Messung wurde bei  $T=25$  mK mit der Typ II-Elektronik durchgeführt.

Bei kleinen Magnetfeldern entsprechen Änderungen in der Rückkoppelspannung  $U_{FB}$  wieder Änderungen im chemischen Potential des 2DES, wie in Kapitel 5 beschrieben. Zu beachten ist hier allerdings die schon erwähnte Umkehr des Vorzeichens.

Bei größeren Magnetfeldern treten starke Peaks in  $U_{FB}(B)$  im Bereich ganzzahliger Füllfaktoren auf, die ihr Vorzeichen umkehren, wenn das Feld zurückgefahren wird. Erklärt werden kann dies damit, daß in den Quanten-Hall-Plateaubereichen Ladungsträger vom Bulk des Hall-Barrens zum Rand verschoben werden und umgekehrt. Die damit verbundene elektrostatische Potentialdifferenz, welche vom SET detektiert wird, ist dabei gleichzeitig die Hall-Spannung eines Wirbelstromes  $I_W$ .

Obwohl hier nicht mit einer Probe in Corbino-Geometrie gemessen wurde, gleicht das Ergebnis dem von Dolgoplov *et al.* [Dol90]. Wie läßt sich das erklären?

Ein Ergebnis aus Kapitel 6 war, daß sich auch ein Hall-Barren wie eine Probe in Corbino-Geometrie verhalten kann. Betrachtet man die Randstruktur bei  $\nu = \text{fast ganzzahlig}$ , so sieht man, daß ein Randbereich mit kompressiblem 2DES durch den innersten inkompressiblen Streifen vom kompressiblen Bulk entkoppelt ist. Eine Variation des Magnetfeldes hätte demnach zur Folge, daß Ladungsträger von innen nach außen (oder umgekehrt) über den innersten inkompressiblen Streifen verschoben werden. Über den inkompressiblen Streifen fällt daher die Hall-Spannung

$$U_H = \frac{\Delta Q}{C_{\text{Rand}}} \quad (7.7)$$

ab.  $C_{\text{Rand}}$  ist die Kapazität zwischen Rand und Bulk einer Probe,  $\Delta Q$  die verschobene Ladung.

Betrachtet man die Form der Peaks, so fällt auf, daß sie sich deutlich von den von Dolgoplov *et al.* gemessenen unterscheiden. Eine kleine Rechnung am Beispiel der Abbildung 7.2 (oben) zeigt, was für eine Form der Peaks zu erwarten ist:

Fließt der Strom in einem Ring mit dem Radius  $r$ , so berechnet sich die induzierte Spannung  $U_{\text{ind}}$  nach dem Induktionsgesetz zu:

$$-\iint \dot{B} \cdot dA = \oint F \cdot dr = U_{\text{ind}} \Rightarrow U_{\text{ind}} = F \cdot 2\pi r . \quad (7.8)$$

Mit  $J = \sigma_{xy} F \Leftrightarrow I = 2\pi r \sigma_{xy} F$ , also

$$I = \sigma_{xy} U_{\text{ind}} , \quad (7.9)$$

folgt dann:

$$I = -\sigma_{xy} \dot{B} \iint dA . \quad (7.10)$$

Ändert sich nur das Magnetfeld und nicht die Fläche  $A$ , so ergibt sich daraus folgender Zusammenhang:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \sim \frac{\Delta B}{\Delta t} \sigma_{xy} . \quad (7.11)$$

Wenn sich jetzt auch noch die Kapazität  $C_{\text{Rand}}$  nicht ändert, wird daraus schließlich:

$$\Delta U_H \sim \frac{\sigma_{xy}}{C_{\text{Rand}}} \Delta B , \quad (7.12)$$

also ein linearer Zusammenhang zwischen der sich aufbauenden Spannung und dem Magnetfeld, was in den Messungen von Dolgoplov *et al.* ([Dol90, Dol92, Dol01]) auch zutrifft. Bei den hier

durchgeführten Messungen ist, ähnlich wie bei denen von Jones *et al.* [Jon95, Jon97, Wat98], dieser Zusammenhang offensichtlich nicht linear. Die Erklärung hierfür dürfte an zwei Tatsachen liegen: Zum einen ändert sich mit dem Magnetfeld die geometrische Anordnung der kompressiblen und inkompressiblen Bereiche im 2DES und damit auch die Fläche  $A$  und die Kapazität  $C_{\text{Rand}}$ . Zum anderen ist natürlich die Kapazität  $C_{\text{Rand}}$  wesentlich kleiner als die in den Experimenten von Dolgoplov *et al.*. Diese wesentlich kleinere Kapazität hat mit  $U_H = \frac{\Delta Q}{C_{\text{Rand}}} = R_{xy} I_W$  wesentlich stärkere Wirbelströme und Hall-Spannungen zur Folge, die den Breakdown des Quanten-Hall-Regimes bewirken.

Diese Wirbelströme können nun einen großen Nettostrom um das gesamte 2DES bilden. Auf der anderen Seite bewirken die Variationen in der lokalen Ladungsträgerkonzentration, daß im Innern des 2DES kompressible *Tropfen und Pfützen* in einer Matrix aus inkompressiblem 2DES auftreten (vgl. Abbildung 7.6). Das bedeutet wiederum, daß es sich um mehrere vereinzelte Wirbelströme im Innern des 2DES handeln könnte, die sich abseits des Randbereiches nicht zwangsläufig aufheben müssen.

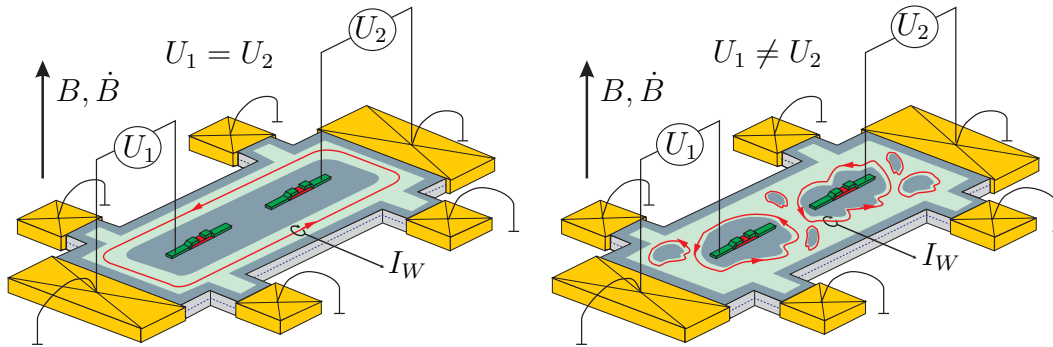


Abbildung 7.6: Fließen die Wirbelströme im Randbereich um die gesamte Probe (links), so registrieren zwei an unterschiedlichen Orten positionierte SETs das gleiche Signal. Fließen die Wirbelströme allerdings um einzelne lokale Inhomogenitäten, so wäre es sehr unwahrscheinlich, daß gleiche Signale gemessen werden.

## 7.2 Korrelationsmessungen

Um herauszufinden, ob es sich um einzelne Wirbelströme im Bulk oder einen großen am Rand des 2DES handelt, muß mit mindestens zwei SETs gleichzeitig an unterschiedlichen Stellen gemessen werden. Sind Form und Amplitude der Peaks an unterschiedlichen Orten der Probe (gleichzeitig gemessen) identisch, so kann daraus geschlossen werden, daß es sich um einen Ringstrom um die gesamte Probe handelt (vgl. Abbildung 7.6). Die Zeichnung in Abbildung 7.5 und das REM-Bild aus Abbildung 4.1 zeigen den Aufbau der dazu verwendeten Proben. Der Hall-Barren hat eine Größe von  $2 \times 1 \text{ mm}^2$ , die großen Quadrate sind die Bondpads der SETs, die sich in den kleinen Quadraten am Ende der Zuleitungen befinden. Von den insgesamt 12 Transistoren wurden 6 gebondet. Hiervon funktionierten im Kryostaten noch 5, was als eine relativ gute Ausbeute zu betrachten ist.

Die Transistoren auf der Probe sind so verteilt, daß sie sich an drei sehr weit voneinander entfernten Orten befinden (siehe Skizzen des Probenlayouts in Abbildung 7.5 oder 7.7, die Zahlen sind die Nummern der verwendeten Kontaktpins). Links und rechts mittig auf dem Hall-Barren befinden sich die Paare 1-19, 4-8 und 9-11, 18-14. Es sind jeweils zwei SETs, die in einem Abstand

von nur  $5\text{ }\mu\text{m}$  zueinander angeordnet sind. Der Transistor 15-17 liegt mit einem Abstand von  $50\text{ }\mu\text{m}$  relativ nahe am Rand des Hall-Barrens.

Abbildung 7.7 zeigt Korrelationsmessungen zwischen Transistoren an den unterschiedlichen Orten. Gemessen wurde immer simultan mit dem Transistor 9-11 und einem der anderen. Auf den ersten Blick sieht man, daß Stärke und Form der Peaks von jeweils zwei miteinander verglichenen Orten immer identisch ist. Auf den zweiten Blick glaubt man, z. B. in der untersten Grafik (Transistorpaare 9-11, 18-14) einen Unterschied in der Amplitude und eine leichte Verschiebung auf der Magnetfeldachse zu sehen. Dies läßt sich dadurch erklären, daß sich die gemessene Potentialdifferenz aus einer Änderung des chemischen Potentials des 2DES in der nächsten Nähe des SETs und der Hall-Spannung des Wirbelstromes zusammensetzt. Zwischen den starken Peaks, die den Wirbelströmen zugesprochen werden, sieht man z. B. bei Transistor 9-11 sehr gut die in Kapitel 5 beschriebene Variation im chemischen Potential.<sup>2</sup> Daß man dies im Signal des zweiten Transistors nicht sieht, liegt daran, daß das Abstimmen der Gate-Spannung  $U_G$  hier nicht durchgeführt wurde, da diese Prozedur (siehe Abschnitt 5.4) sehr viel Zeit in Anspruch nimmt. Jeden SET vor einer Messung optimal abzustimmen hätte daher die zeitlichen Abstände zwischen den Messungen vervielfacht. Wäre diese Prozedur bei jedem SET durchgeführt worden, hätte diese nicht automatisierbare Meßreihe nur mit mindestens einer Unterbrechung durchgeführt werden können<sup>3</sup>. Da sich aber schon aufgrund von Temperaturschwankungen im Kryostaten die Umgebung der Probe auf Zeitskalen von Minuten ändern kann, ist es wichtig, die Messungen an einem Stück bzw. Meßtag durchzuführen. In einer späteren Messung wird auch noch gezeigt, daß das Signal der Wirbelströme nicht von der Gate-Spannung abhängt. Die kleinen Unterschiede in den Peaks lassen sich also auf unterschiedliche Untergründe in den jeweiligen Kurvenverläufen zurückführen.

Die Messungen aus Abbildung 7.7 lassen demnach den Schluß zu, daß die elektrostatische Potentialdifferenz zwischen Bulk und Randbereich des 2DES in einem sehr schmalen Streifen in der Nähe des Probenrandes abfallen muß, da das Signal der Wirbelströme an unterschiedlichen Orten der Probe stets identisch ist. Es scheint sich also um einen großen Ringstrom zu handeln, der die gesamte Probe in der Nähe des Randes umfließt. Da der Spannungsabfall in einer Entfernung von  $50\text{ }\mu\text{m}$  zum Rand bereits voll ausgebildet ist, decken sich die theoretischen Ergebnisse aus [Kav03] nicht mit diesen Meßergebnissen.

Ein weiteres Experiment, um die These des globalen Ringstromes zu verifizieren, besteht darin, den lokalen Füllfaktor unterhalb des SETs durch eine Änderung der Gate-Spannung  $U_G$ , also der Spannung zwischen SET und 2DES, zu verändern (vgl. Abschnitt 5.4). Handelt es sich um einen kleinen Wirbelstrom in der Nähe des Transistors, so sollte eine Änderung in der lokalen Ladungsträgerkonzentration den Wirbelstrom beeinflussen.

Abbildung 7.8 zeigt das Ergebnis dieses Experiments. Die Grafik enthält 11 Sweeps mit positivem  $\dot{B}$ , die Gate-Spannung wurde von  $U_G = 80\text{ mV}$  bis  $U_G = -70\text{ mV}$  variiert. Der Sprung im chemischen Potential beim lokalen Füllfaktor  $\nu_l = 8$  verändert seine Lage dabei zwischen  $B \approx 1.45\text{ T}$  und  $B \approx 1.15\text{ T}$ , da sich die lokale Elektronendichte  $n_l$  in der Nähe des SETs ändert. Die Lage und die Stärke des Wirbelstrom-Peaks bleibt aber unverändert. Man sieht lediglich, wie die sich überlagernden Änderungen im lokalen chemischen Potential die Form der Peaks verändern. Handelte es sich um kleine, in der Nähe des Transistors fließende Wirbelströme, so müßte eine solch starke Änderung in der Ladungsträgerkonzentration eine deutliche Auswirkung auf die Wirbelströme haben.

<sup>2</sup>Man beachte auch hier wieder die entgegengesetzten Vorzeichen aufgrund der verschiedenen Meßanordnungen.

<sup>3</sup>Irgendwann braucht auch der eifrigste Experimentator mal etwas Schlaf und Nahrung.

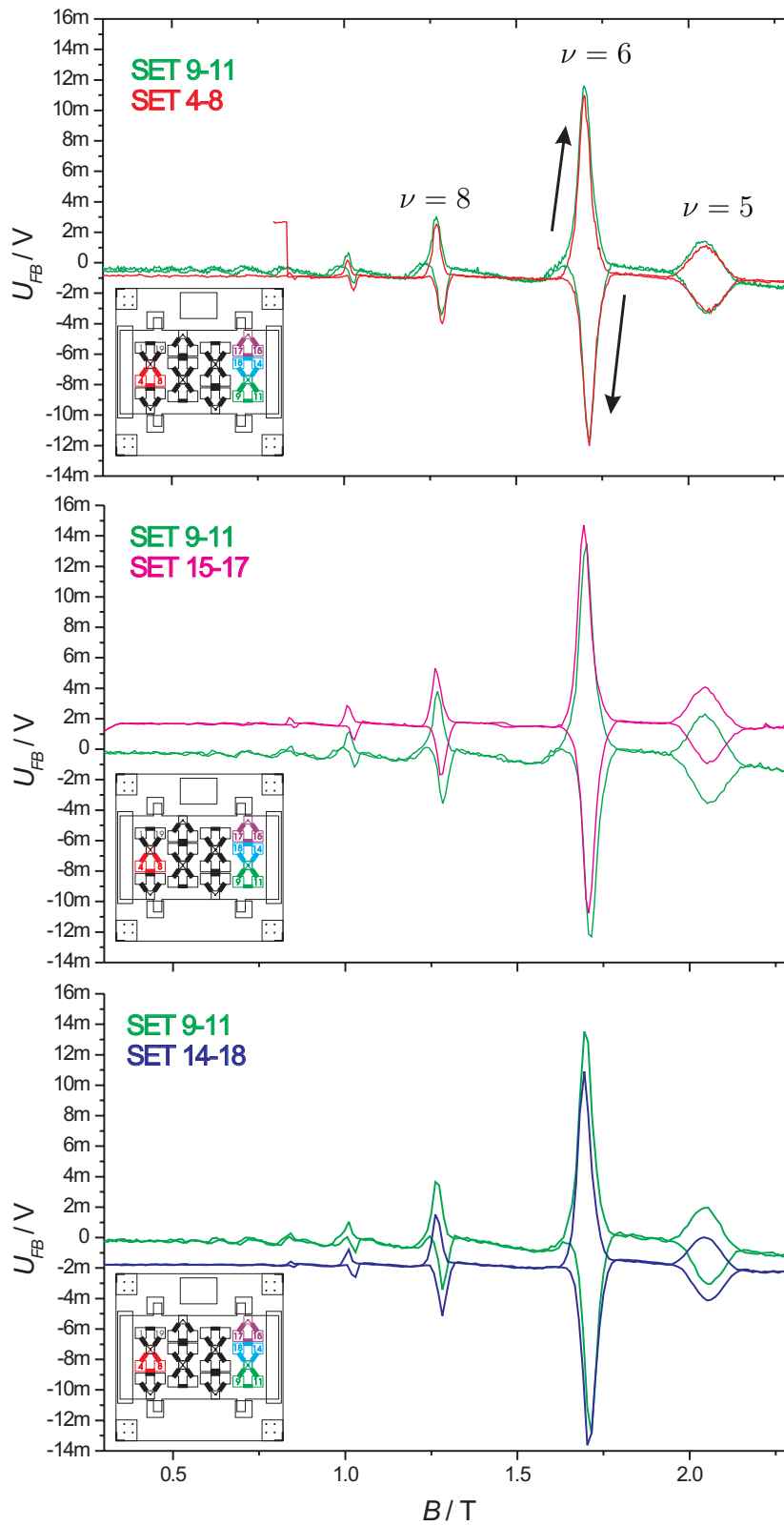


Abbildung 7.7: Korrelationsmessungen mit unterschiedlichen SETs auf einem Hall-Barren. Die Skizze mit dem Probenlayout zeigt, mit welchen SETs jeweils während einer Messung gemeinsam gemessen wurde. Die Messungen wurden bei  $T=25$  mK mit der Meßanordnung Typ II durchgeführt.

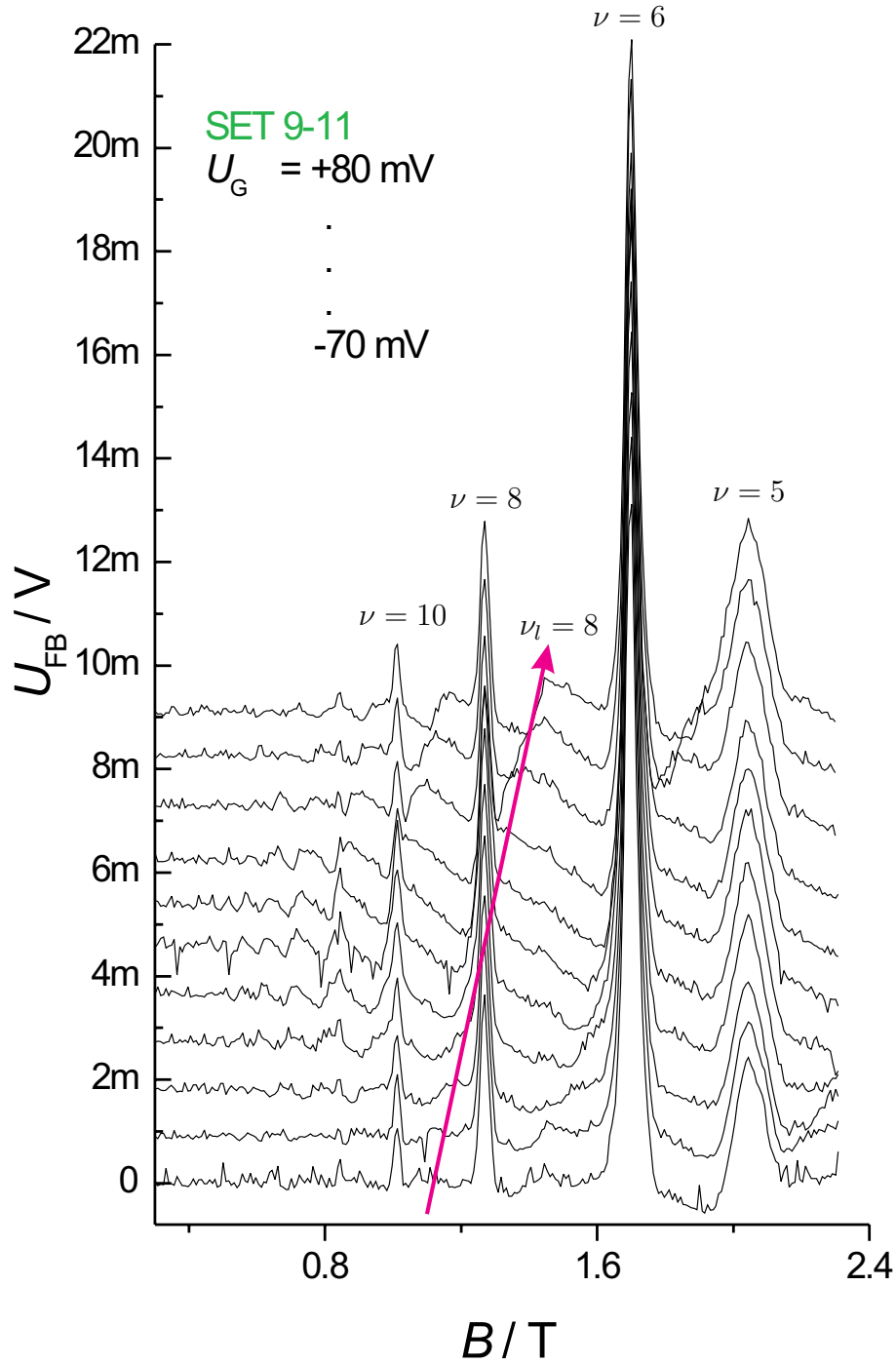


Abbildung 7.8: Signal der Rückkoppelschleife (Typ II)  $U_{FB}$  für unterschiedliche Sweeps mit positivem  $\dot{B}$  und unterschiedlichen Gate-Spannungen  $U_G$ . Die Peaks der induzierten Wirbelströme bleiben jeweils in einem konstanten Magnetfeldbereich, während der durch die Variation des lokalen chemischen Potentials hervorgerufene Anteil des Signals auf der Magnetfeldachse 'schiebt'.

### 7.3 Wirbelströme am Rand eines Hall-Barrens

Die Messungen des letzten Abschnitts haben gezeigt, daß man die Wirbelströme im wesentlichen im Randbereich eines Hall-Barrens suchen sollte. Dabei kann man nicht unterscheiden, ob es sich um einen *einzelnen* Randstrom oder um ein Netzwerk sehr vieler kleiner Wirbelströme handelt, welche sich im Innern des 2DES aufheben und nur am Rand einen *Netto*-Strom bilden. Mit Wirbelstrom ist daher im Folgenden auch immer ein *Netto-Wirbelstrom* gemeint.

Besonders interessant ist es natürlich, den Hall-Spannungsabfall dieser Stromes genauer zu lokalisieren. Dazu wurden wieder Proben mit zusätzlichen Seitengates in der Nähe der SETs hergestellt (vgl. Kapitel 6). Abbildung 7.9 zeigt eine Messung an einer Probe mit zwei SETs, die sich in einer Entfernung von  $11\ \mu\text{m}$  vom Probenrand befinden. Im Abstand von  $1\ \mu\text{m}$  von jedem SET befindet sich ein Seitengate, welches den Rand des Hall-Barrens um  $10\ \mu\text{m}$  überlappt. Der laterale Abstand zwischen beiden SETs ist mit  $600\ \mu\text{m}$  sehr groß bemessen. Auch hier sind Amplitude und Form der Signale beider parallel gemessener Transistoren in etwa gleich, was wieder für einen globalen Wirbelstrom entlang des Probenrandes spricht. Die Amplituden der Peaks fallen im Vergleich zu denen der Probe des letzten Abschnitts allerdings um mehr als eine Größenordnung kleiner aus, was zum einen aus der Tatsache herrührt, daß es sich um ein anderes Probenmaterial handelt. Zum anderen befinden sich diese SETs mit einer Entfernung von  $11\ \mu\text{m}$  deutlich näher am Rand, als der randnächste SET aus Abbildung 7.7 mit  $50\ \mu\text{m}$ . Es kann also auch sein, daß ein SET im Zentrum der Probe ein stärkeres Signal registrieren würde, da die laterale Ausdehnung des Spannungsabfalls nicht zwangsläufig nur auf die ersten  $11\ \mu\text{m}$  am Rand beschränkt sein muß.

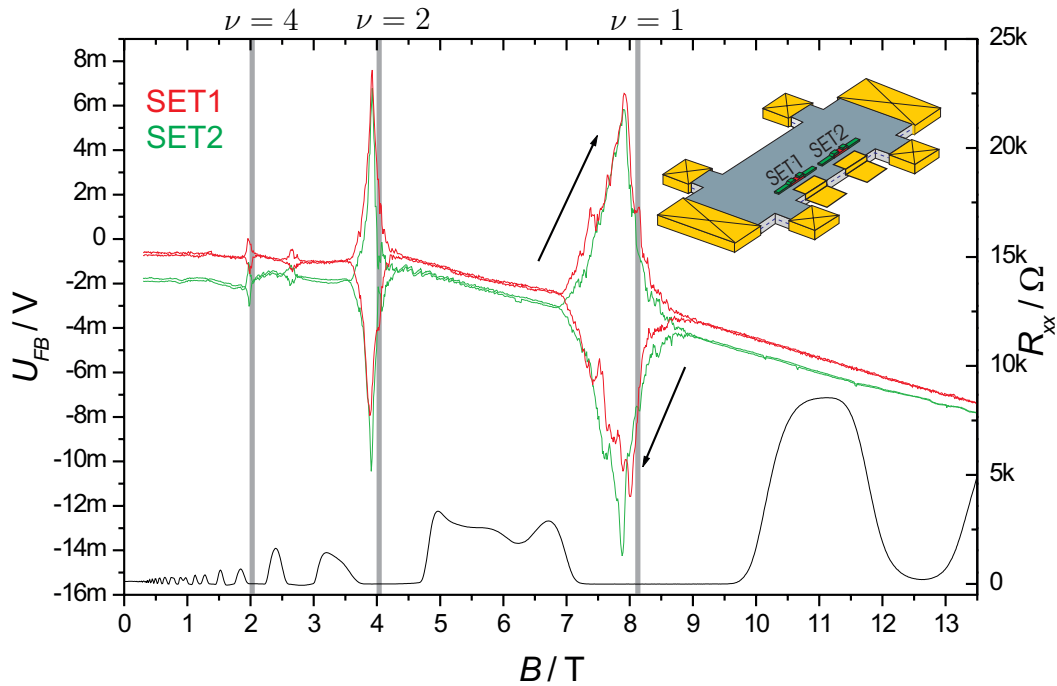


Abbildung 7.9: Signal der Rückkoppelschleife (Typ II)  $U_{FB}$  zweier Transistoren, die sich im Randbereich des Hall-Barrens befinden. Die Spannung an den Seitengates beträgt 0 V.



Des weiteren sieht man auf den Peaks in Abbildung 7.9 eine Struktur. So etwas wurde nur bei Messungen mit randnahen SETs beobachtet und ließ sich von Sweep zu Sweep i. a. sehr gut reproduzieren, solange kein Parameter wie  $U_G$  oder  $U_{SG}$  verändert wurde. Die Struktur läßt sich vermutlich darauf zurückführen, daß der Pfad des Wirbelstromes aufgrund der intrinsischen Potentiallandschaft im 2DES mit dem Magnetfeld leicht variiert. Fällt wenigstens ein Teil der Spannung hinter der Position des SETs ab, so hat eine solche Variation eine Auswirkung auf das Meßsignal,

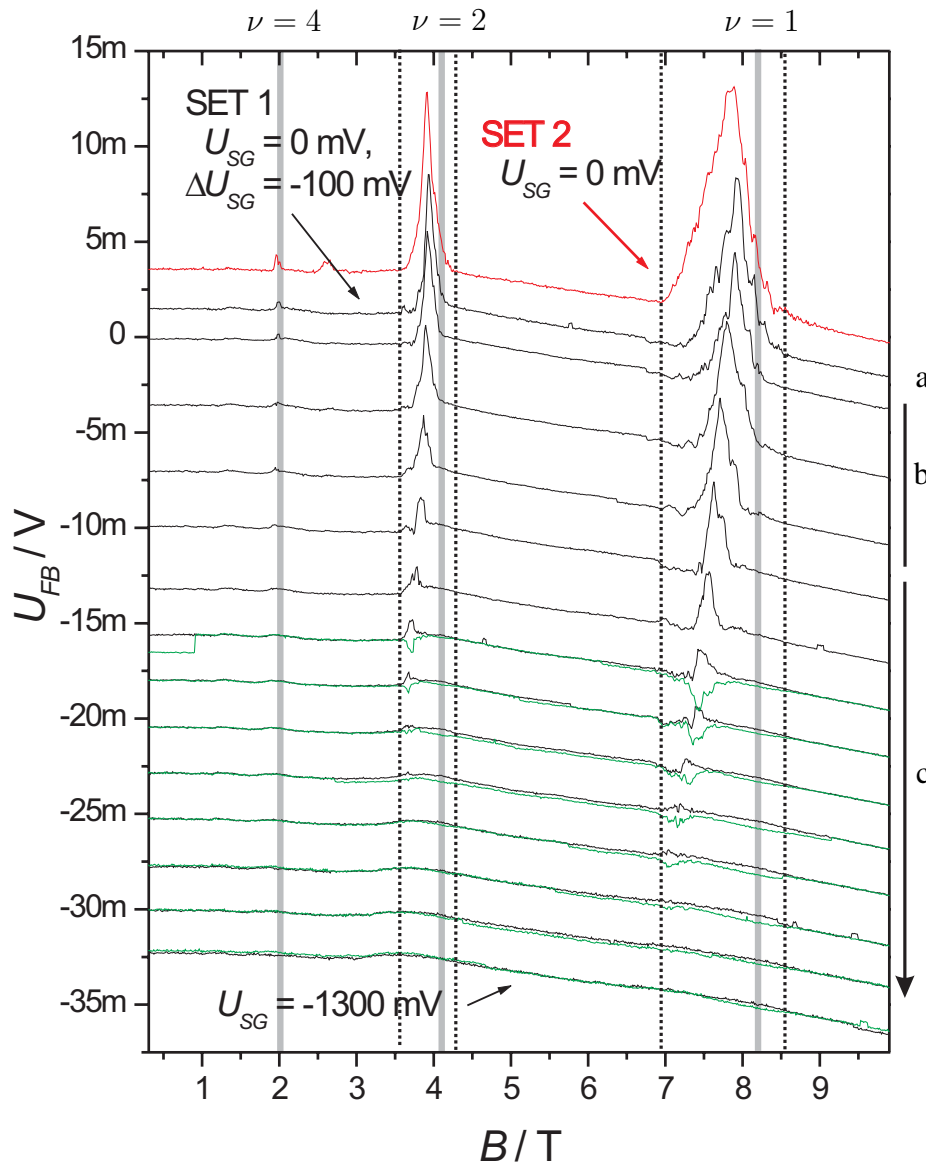


Abbildung 7.10: Signal der Rückkoppelschleife (Typ II)  $U_{FB}$  zweier Transistoren (SET1 & SET2), die sich im Randbereich des Hall-Barrens befinden. Das Seitengate von SET2 war auf Masse geschaltet, die Spannung am Seitengate von SET1 ( $U_{SG}$ ) wurde zwischen  $U_{SG} = 0$  V und  $U_{SG} = -1300$  mV variiert. Gemessen wurde immer simultan mit beiden SETs. Da sich am Signal von SET2 während der gesamten Meßreihe nichts geändert hat, ist nur die erste Kurve mit positivem  $\dot{B}$  gezeigt.

die sich in einer solchen Struktur äußert. Es ist daher ein wenig bedauerlich, daß es nicht gelungen ist, Proben herzustellen, welche mehrere Rand-SETs und einen zusätzlichen Bulk-SET haben. Ein SET in der Mitte der Probe, welcher ein etwas stärkeres Signal ohne Struktur als Einhüllende zeigt, könnte diese Vermutung noch weiter erhärten.

In einer weiteren Meßreihe wurde dann bei einem der beiden Transistoren (SET1) die Seitengate-Spannung variiert (Abbildung 7.10), während bei SET2 alles unverändert blieb. Die oberste Kurve ist das Signal von SET2 während eines Sweeps mit positivem  $\dot{B}$ . Diese Kurve hat sich während aller darauf folgenden Messungen nicht verändert. Bei diesen Messungen wurde die Seitengate-Spannung  $U_{SG}$  von SET1 in Schritten von  $\Delta U_{SG} = -100$  mV verändert. Für die ersten 6 Kurven ist nur der Ast mit positivem  $\dot{B}$  gezeigt, da die Grafik sonst sehr unübersichtlich werden würde.

Zum einen werden die Peaks mit zunehmender (negativer) Seitengate-Spannung kleiner, bis sie schließlich gar nicht mehr erscheinen, zum anderen schieben sie auf der Magnetfeldachse zu kleineren Magnetfeldern. Dies läßt sich folgendermaßen erklären:

Der Bereich der Seitengate-Spannungen kann in drei Bereiche unterteilt werden:

- a)  $U_{SG} = 0$  V: Unterhalb des Seitengates ist die Ladungsträgerkonzentration identisch mit der im Bulk des 2DES. Der Rand des 2DES wird daher durch den Rand des Hall-Barrens definiert, und der Transistor befindet sich mit einer Entfernung von  $11 \mu\text{m}$  zum Probenrand quasi im Bulk.
- b)  $-0.3 \text{ V} < U_{SG} < 0$  V: Eine negative Spannung am Seitengate verarmt das darunterliegende 2DES. Unterhalb des Seitengates ist daher der lokale Füllfaktor kleiner als der Füllfaktor im Bulkbereich.
- c)  $U_{SG} \leq -0.3$  V: Die Fläche unter dem Seitengate ist vollständig verarmt, und weiteres Erhöhen der (negativen) Seitengate-Spannung  $U_{SG}$  verschiebt den Rand in Richtung SET (vgl. Gleichung 6.5). Der Transistor befindet sich in einer Entfernung von weniger als  $1 \mu\text{m}$  vom Rand des 2DES.

Wie ändert sich z. B. der in Abbildung 7.10 stark dominierende Peak beim Füllfaktor  $\nu = 1$ ?

- Im Bereich b) verkleinert sich der Peak vorwiegend auf seiner rechten Seite, bei höheren Magnetfeldern.
- Im Bereich c) schiebt er dann immer weiter nach links zu kleineren Feldern, bis er schließlich verschwindet.

Des weiteren sieht man in Abbildung 7.10, daß der  $\nu = 1$ -Peak von SET2 noch etwas stärker ausgebildet ist als der von SET1 mit  $U_{SG} = 0$ . Er scheint eine Einhüllende zu bilden, in deren Bereich die  $\nu = 1$ -Peaks von SET1 schieben.

Notwendiges Kriterium für das Detektieren eines Wirbelstromes mit einem SET ist, daß der Wirbelstrom zwischen dem Rand der Probe und der SET-Sonde fließt. Der Bereich der Probe, in dem die Nettobeiträge der Wirbelströme auftreten, kann aufgrund der Ergebnisse der Korrelationsmessungen aus Abschnitt 7.2 auf einen Streifen von weniger als  $50 \mu\text{m}$  Breite am Rand des Hall-Barrens eingegrenzt werden. Es bleiben daher noch zwei mögliche Orte, in denen die Wirbelströme induziert werden können:

- i) Der äußerste Randbereich, in dem sich breite kompressible Streifen und schmale inkompressible Streifen abwechseln.
- ii) Der innere Randbereich, in dem sich der innerste inkompressible Streifen ausbreitet.

Obwohl der äußerste Randbereich des 2DES bei mittleren Seitengate-Spannungen noch um die SET-Sonde läuft, werden die Peaks schon stark unterdrückt. Es scheidet daher Fall i) aus und Fall ii) bleibt übrig.

Abbildung 7.11 zeigt ein Modell, welches die Ergebnisse aus Abbildung 7.10 erklärt: Mit steigendem Magnetfeld  $B$  entfernt sich der innerste inkompressible Streifen immer weiter vom Rand des 2DES ( $y$ -Achse) und wird breiter, bzw. nimmt das gesamte Innere des 2DES ein. Durch die Variation des Magnetfeldes wird über den eingangs vorgestellten Mechanismus ein Wirbelstrom  $I_W$  in diesem Streifen induziert. Das Hall-Feld über diesem Streifen steht im reziproken Verhältnis zur Streifenbreite und bestimmt die Dämpfung des Wirbelstromes.

Um das Schieben und Dämpfen der Peaks mit zunehmender Seitengate-Spannung  $U_{SG}$  zu erklären (was einem Verschieben des SETs zum Rand hin gleicht), führen wir jetzt ein kleines Gedankenexperiment durch (Abbildung 7.11). Bei diesem Gedankenexperiment verändern wir das Magnetfeld, beginnend in einem Bereich mit halbzahligen Füllfaktor, durch den Bereich eines Quanten-Hall-Plateaus: Bei kleinen Magnetfeldern ( $B < B_1$ ) ist der innerste inkompressible Streifen noch sehr schmal. Es kann sich kein dissipationsloser Wirbelstrom ausbilden, da Streuprozesse über den Streifen stark dämpfend wirken. Ab  $B = B_1$  ist der innerste inkompressible Streifen gut ausgebildet, und ein meßbarer Wirbelstrom  $I_W$  wird in diesem Streifen induziert. Gleichzeitig entsteht die Spannungsdifferenz  $U_H = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} I_W$  über den inkompressiblen Streifen. Wird das Magnetfeld weiter erhöht, so wandert der inkompressible Streifen ins Innere der Probe und wird dabei auch breiter. Die elektrische Feldstärke innerhalb des inkompressiblen Streifens nimmt mit zunehmender Streifenbreite ab. Der dämpfende Einfluß von Streumechanismen auf den Wirbelstrom wird schwächer und der Wirbelstrom somit stärker.

In Abbildung 7.11 sind zu erwartende Spannungsdifferenzen  $U_H$  skizziert, wie sie ein SET messen würde, der sich in der Entfernung  $y$  zum Rand der Probe befindet. In der zweiten Kurve von links beispielsweise befindet sich der SET sehr nahe am Probenrand. Ab  $B = B_1$  detektiert er die Hall-Spannung  $U_H$  des sich aufbauenden Wirbelstromes. Ab dem Magnetfeld  $B = B_1 + \Delta B_1(y)$  fließt der Wirbelstrom abseits des SETs, und es wird keine Spannungsdifferenz mehr gemessen, da der SET elektrostatisch an den Randbereich des 2DES koppelt. In der ersten Kurve befindet er sich dann so nahe am Rand, daß ab dem Magnetfeld  $B_1$  der innerste inkompressible Streifen bereits hinter ihm verläuft. Es wird überhaupt keine Spannungsdifferenz gemessen, was auch für Seitengate-Spannungen  $U_{SG} < -1.2$  V in Abbildung 7.10 zutrifft.

Verlagert man den Ort des SETs hingegen immer weiter ins Innere des 2DES, so wird das Magnetfeldintervall  $\Delta B_1(y)$ , in dem die Spannung  $U_H$  gemessen wird, immer größer, bis es den maximalen Wert  $\Delta B_2$  erreicht. Dieser Wert wird schon erreicht, wenn der SET nur wenige  $\mu m$  vom Rand der Probe entfernt ist (vgl. Abbildung 6.2). Dies erklärt dann auch, warum viele an unterschiedlichen Orten im Bulk der Probe angeordnete SETs ein Signal von gleicher Stärke messen.

Dieses Modell erklärt die bisherigen Beobachtungen und läßt den Schluß zu, daß die Wirbelströme im Bereich des innersten inkompressiblen Streifens fließen. Sie werden durch einen Spannungsabfall über den gut isolierenden inkompressiblen Bereich aufrechterhalten und fließen als Hall-Strom, getragen durch ausgedehnte Zustände unterhalb der Fermi-Energie; ein Modell, welches auch in der Arbeit von Jan Hül's [Hül01] vorgeschlagen wird.

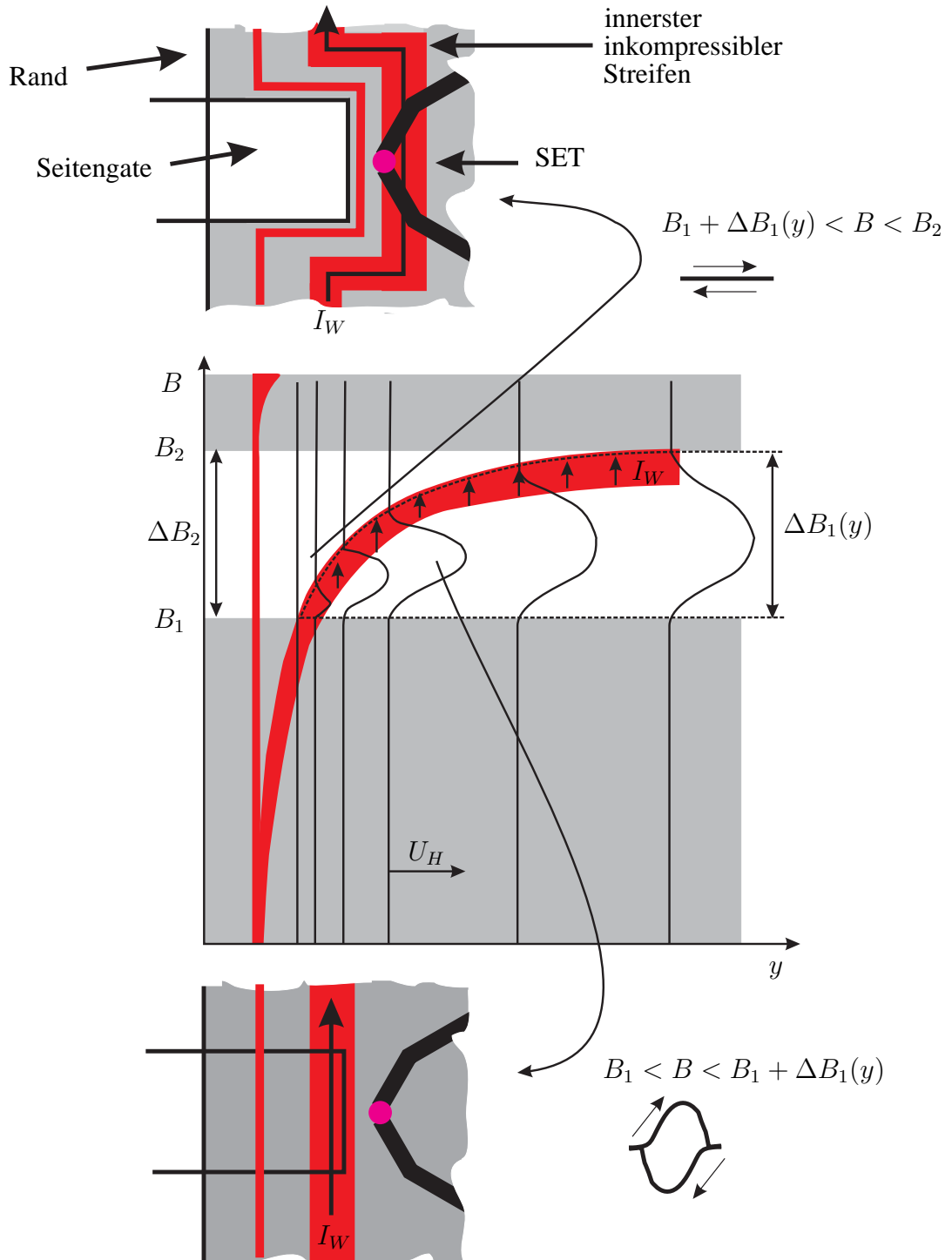


Abbildung 7.11: Skizze zur Interpretation der Meßergebnisse aus Abbildung 7.10. Gezeigt sind die Entwicklung des innersten inkompressiblen Streifens mit dem Magnetfeld und zu erwartende Meßsignale  $U_H$  einer SET-Sonde, die sich in unterschiedlichen Entfernungen  $y$  vom Rand befindet. (Das Auflösen der inkompressiblen Bereiche am Ende des QHE-Plateaus wurde bei dieser vereinfachten Darstellung nicht berücksichtigt.) Verläuft der innerste inkompressible Streifen zwischen Transistor und dem Rand der Probe, so detektiert der SET die Hall-Spannung  $U_H = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} I_W$  des Wirbelstromes. Für Magnetfelder oberhalb von  $B = B_1 + \Delta B_1(y)$  ist der SET elektrostatisch an den kompressiblen Randbereich der Probe gekoppelt und 'merkt' nichts mehr von dem Wirbelstrom. Je näher sich der SET am Rand des 2DES befindet, desto kleiner wird das Magnetfeldintervall  $\Delta B_1(y)$ , in dem der Strom um den SET fließt, da der inkompressible Streifen mit zunehmendem Magnetfeld seine Position immer weiter ins Innere des 2DES verlagert. Befindet sich der Transistor im Bulk einer Probe, so wird über dem gesamten Bereich  $\Delta B_2 = B_2 - B_1$  eine Hall-Spannung gemessen. Diese Kurve bildet eine Einhüllende für Kurven, die näher am Rand aufgenommen werden.

## 7.4 Dynamisches Verhalten der Wirbelströme

Um die Dynamik bzw. das Relaxationsverhalten der sich zwischen Bulk und Rand eines 2DES aufbauenden Spannungen zu untersuchen, wurde folgendes Experiment durchgeführt: Ein Spannungsspeak wurde mit dem Magnetfeld mehrfach 'durchfahren' und der Sweep vor dem 'Zurückfahren' des Magnetfeldes bei immer kleineren Feldern innerhalb der Hystereseschleife abgebrochen. Das Ergebnis zeigt Abbildung 7.12: Sofort nach dem Anhalten des Magnetfeldes relaxiert die Spannung  $U_{FB}$  auf eine Kurve, die von der Variation des lokalen chemischen Potentials in der Nähe des SETs bestimmt wird.

Obwohl die Rückkoppschleife eine Bandbreite von mehr als 1 kHz hat, die es erlauben würde das Relaxationsverhalten in diesem Bereich zu quantifizieren, erlaubt der supraleitende Magnet und dessen Steuerungselektronik dies nicht. Das Anhalten eines Sweeps, verbunden mit dem Stabilisieren des Magnetfeldes auf den Soll-Wert, benötigt mehrere Sekunden, innerhalb derer der Relaxationsvorgang längst abgeschlossen ist.

Wird das Magnetfeld dann zurückgefahren, so ist schon der zweite Datenpunkt wieder auf der einhüllenden Kurve, die beim Durchfahren des Bereiches ohne einen Zwischenstopp gemessen wird. Die induzierten Wirbelströme scheinen demnach immer, wenn das Magnetfeld variiert wird, gesättigt zu sein und relaxieren beim Stopp der Variation in einer mit der Apparatur nicht aufzulösenden Zeit wieder auf Null.

Das nächst Naheliegende ist also eine Messung, in der der gesamte Bereich durchfahren wird und von Messung zu Messung die Sweep rate verringert wird. Abbildung 7.13 zeigt so eine Messung. Bei den äußeren Kurven liegt die Sweep rate in einem Bereich, wie er gewöhnlich verwendet

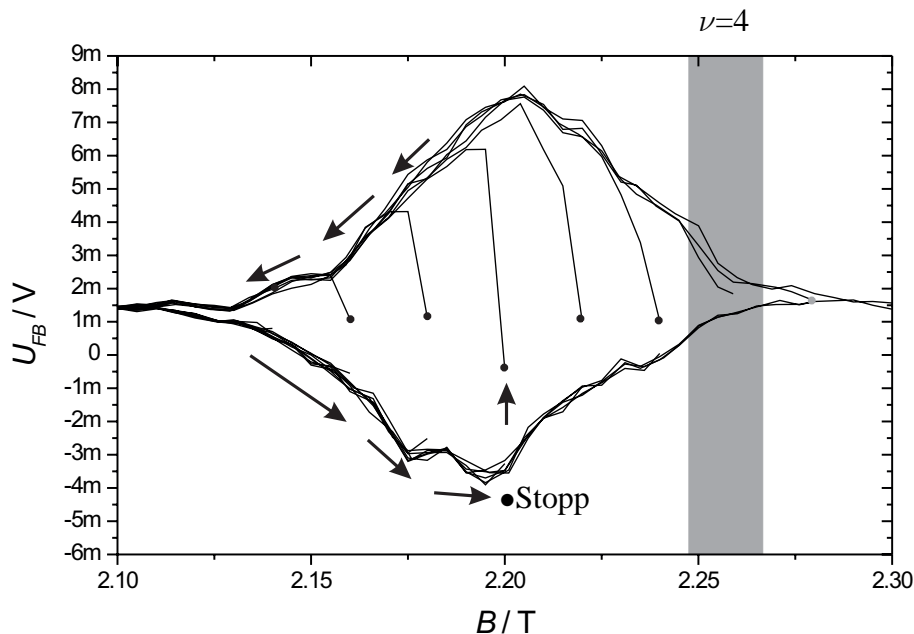


Abbildung 7.12: Signal der Rückkoppschleife (Typ I)  $U_{FB}$  eines randnahen SETs für mehrere Sweeps, die bei unterschiedlichen Magnetfeldern abgebrochen und dann in ihrer Richtung umgekehrt wurden. Die Temperatur während der Messung betrug  $T = 25$  mK.

wird: zwischen 1.2 und 0.7 T/min. In diesem Bereich tut sich gar nichts. Erst wenn die Sweep-rate um eine Zehnerpotenz nach unten verringert wird, verringert sich auch die Amplitude von  $U_{FB}$ . Dies bestätigt das Ergebnis von Jan Hül's [Hül01], der dieses Verhalten auch an einem ungeraden ( $\nu = 5$ ) und einem fraktionalen Füllfaktor ( $\nu = 2/3$ ) beobachtet hat.

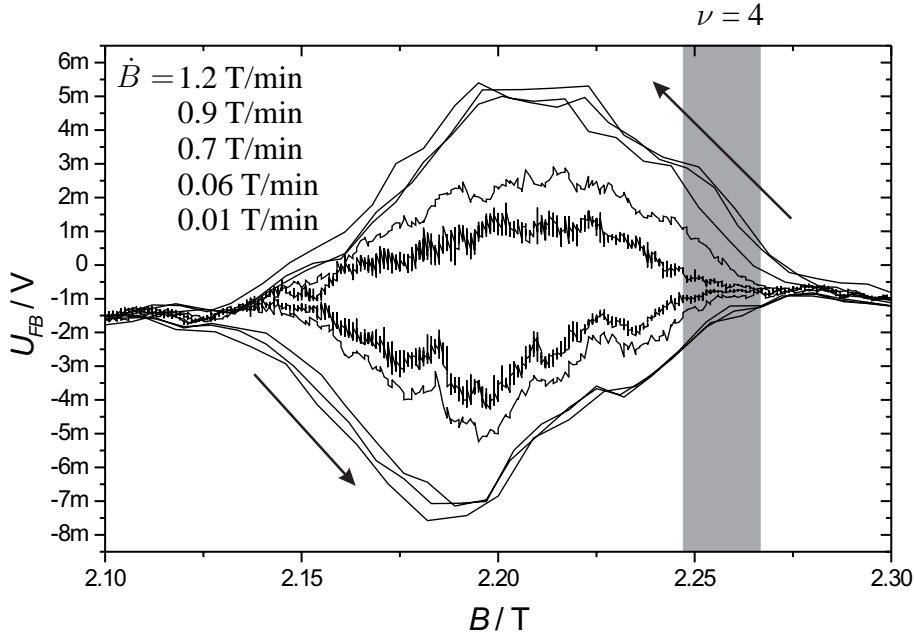


Abbildung 7.13: Signal der Rückkoppschleife (Typ I)  $U_{FB}$  eines randnahen SETs für mehrere Sweeps mit unterschiedlichen Sweep-raten  $\dot{B}$ . Temperatur während der Messung:  $T = 25$  mK.

Die schon im letzten Abschnitt verwendete Probe mit zwei am Rand der Probe positionierten SETs, die sich in einer Entfernung von einem Mikrometer zu einem den Rand überlappenden Seitengate befinden, bietet jetzt die Möglichkeit zu einem weiteren interessanten Experiment. In Abbildung 7.14 sieht man zwei Kurvenscharen, die den SET-Transistoren SET1 und SET2 zugeordnet sind (Skizze). Gemessen wurde mit der Meßelektronik Typ II, bei der die ohmschen Kontakte auf Masse geschaltet sind und das elektrostatische Potential der SET-Sonde während einer Messung variiert wird. Als Sweep-raten wurden  $\dot{B} = 1.2$  T/min, 0.15 T/min und 0.05 T/min gewählt.

SET2 ( $U_{SG} = 0$  V) hat eine Entfernung von  $11 \mu\text{m}$  zum Rand des 2DES. Die einzelnen Kurven zeigen zwar einen leichten Drift, aber keine sichtbare Verringerung in der Amplitude bei Reduzierung der Sweep-rate. Im Gegensatz dazu zeigen die simultan gemessenen Kurven von SET1 eine zwar nur leichte, aber immerhin sichtbare Sweep-ratenabhängigkeit.

SET1 liegt aufgrund der anliegenden Seitengate-Spannung  $U_{SG} = -200$  mV in einer Entfernung von ca.  $1 \mu\text{m}$  zum Rand des 2DES. Diese Messung legt den Schluß nahe, daß eine sich aufgebaute Spannungsdifferenz zwischen Bulk- und Randbereich einer Probe zwar über dem innersten inkompressiblen Streifen abfällt, aber bei einem Stopp des Sweeps vom Rand ins Innere der Probe relaxiert. Um dies zu überprüfen, wurde diese Messung an der Probe aus Abbildung 7.5, ff. mit

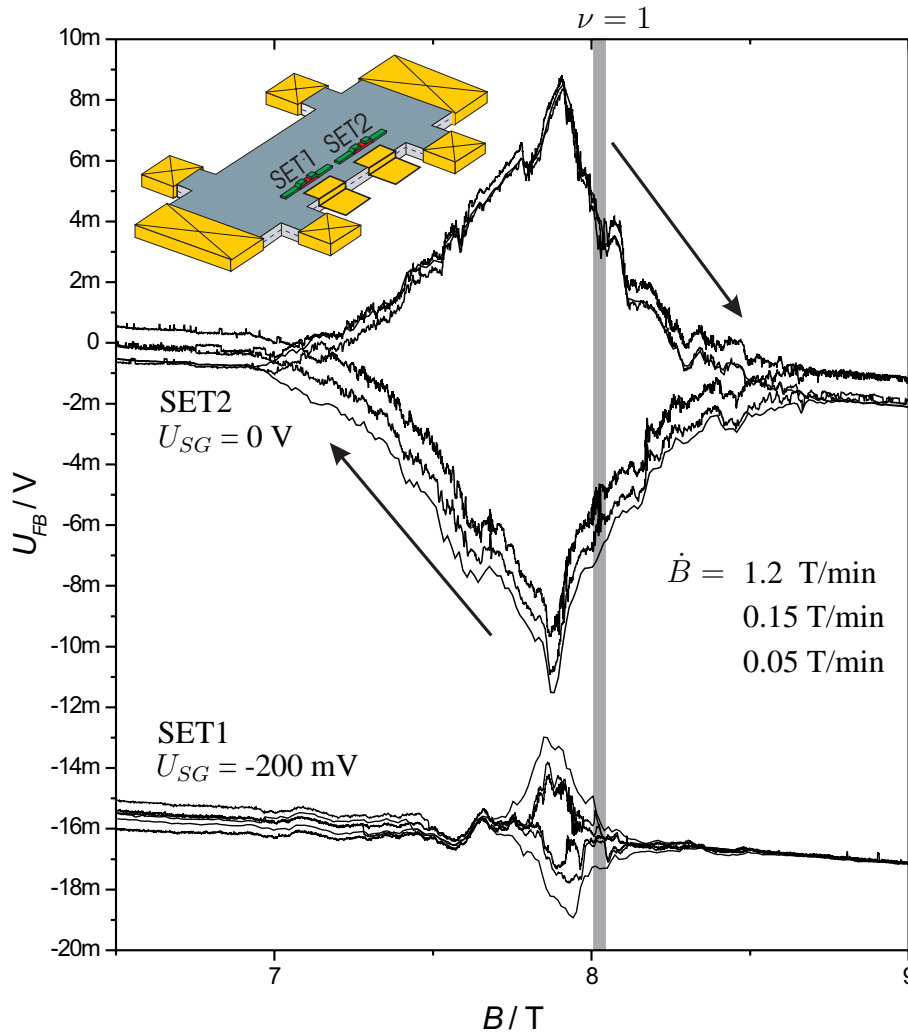


Abbildung 7.14: Signal der Rückkopplerschleife (Typ II)  $U_{FB}$  zweier Transistoren (SET1 & SET2), die sich im Randbereich des Hall-Barrens befinden. Das Seitengate von SET2 war auf Masse geschaltet, die Spannung am Seitengate von SET1 betrug  $U_{SG} = -200$  mV. Gemessen wurde immer simultan mit beiden SETs. Temperatur während der Messung:  $T = 25$  mK.

dem Transistor 9-11 (Abstand Rand-SET  $\approx 0.5$  mm) und SET 15-17 (Abstand Rand-SET  $\approx 50$   $\mu\text{m}$ ) durchgeführt (Abbildung 7.15). Da diese Probe relativ starke Wirbelstrom-Effekte zeigt, wurde der Magnetfeldbereich um Füllfaktor  $\nu = 5$  gewählt. Der Vorteil dieses Füllfaktors für diese Messung ist der, daß der energetische Abstand zwischen dem höchsten besetzten Landau-Niveau und dem tiefsten unbesetzten Landau-Niveau durch die Spin-Aufspaltung  $\Delta E = g^* \mu_B B$  definiert wird und somit wesentlich kleiner als bei geradzahligen Füllfaktoren ist. Die Wahrscheinlichkeit für einen dämpfend wirkenden Streuprozess ist somit bei einem Spin-aufgespaltenem Füllfaktor wesentlich höher als bei einem Landau-aufgespaltenen Füllfaktor.

Das Ergebnis dieser Messung bestätigt die zu überprüfende These: Das Signal des weiter außen positionierten SETs zeigt eine wesentlich stärker ausgeprägte Sweepratenabhängigkeit, als das des

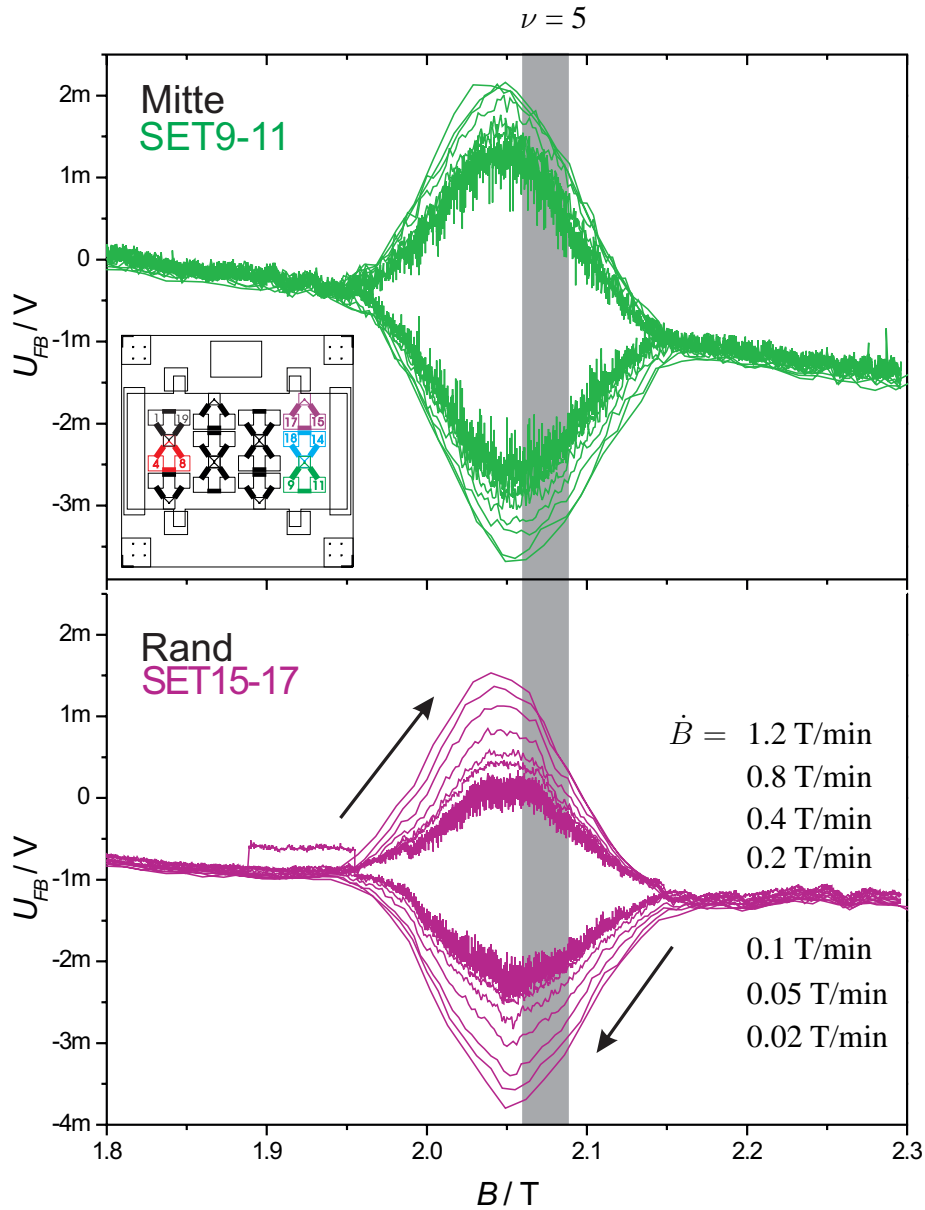


Abbildung 7.15: Signal der Rückkoppelschleife (Typ II)  $U_{FB}$  zweier Transistoren (SET 9-11 & SET15-17), die sich in der Mitte der Probe (oben) und im erweiterten Randbereich (unten) des Hall-Barrens befinden bei unterschiedlichen Sweepzeiten. Gemessen wurde immer simultan mit beiden SETs. Temperatur während der Messung:  $T = 25$  mK.

inneren.

Erklären kann man dieses Verhalten also dadurch, daß eine Variation des Magnetfeldes den schon viel diskutierten Spannungsabfall am Rand der Probe induziert, welcher das thermodynamische Gleichgewicht innerhalb des 2DES zerstört. Es ist eine elektrostatische Potentialdifferenz über einen schmalen Randbereich entstanden, die sich natürlich auszugleichen versucht. Dies ist nur in Richtung Zentrum des 2DES möglich.

Wird das Magnetfeld ständig weiter variiert, so bildet sich ein dynamisches Gleichgewicht zwi-



schen der induzierten Spannung und deren Relaxation ins Gleichgewicht, die aufgrund der kleinen Kapazität  $C_{Rand}$  sehr schnell sättigt. Je größer die Energielücke des entsprechenden Füllfaktors ist, desto stärker kann das Hall-Feld am Probenrand werden und desto langsamer werden auch dessen Relaxationsprozesse. Bei einem extrem langsamen Sweep und einem Füllfaktor mit kleiner Energielücke ist genau das Gegenteil der Fall und dieses dynamische Verhalten läßt sich, wie in Abbildung 7.15 gezeigt, beobachten.

Abbildung 7.16 skizziert dieses Modell. Gezeigt sind die Profile des elektrochemischen Potentials von einem Rand des 2DES zum anderen für einen schnellen und einen langsamen Sweep. Beim schnellen Sweep fällt die induzierte elektrostatische Potentialdifferenz sehr steil in der Nähe des Probenrandes ab, beim langsamen Sweep dehnt sich dieses Gebiet über einen etwas breiteren Bereich aus, in dem sich SET1 befindet. Ein in der Mitte des 2DES befindlicher SET (SET2) mißt gegenüber dem Probenrand die Spannungsdifferenz  $U_2 = U_{FB}^{SET2}$ , unabhängig davon, ob das Magnetfeld schnell oder langsam variiert wird<sup>4</sup>

Der nahe am Rand positionierte SET1 hingegen mißt die Spannungsdifferenz  $U_1 = U_{FB}^{SET1}$ , welche von der Steilheit des Potentialprofils bestimmt wird. Bei einer simultanen Messung mit beiden SETs in Rückkoppeltechnik hätten die gemessenen Spannungen der Rückkoppelschleifen also eine Differenz von  $U_{FB}^{SET2} - U_{FB}^{SET1} = \Delta U$ , welche um so stärker ausfällt, je langsamer das Magnetfeld variiert wird.

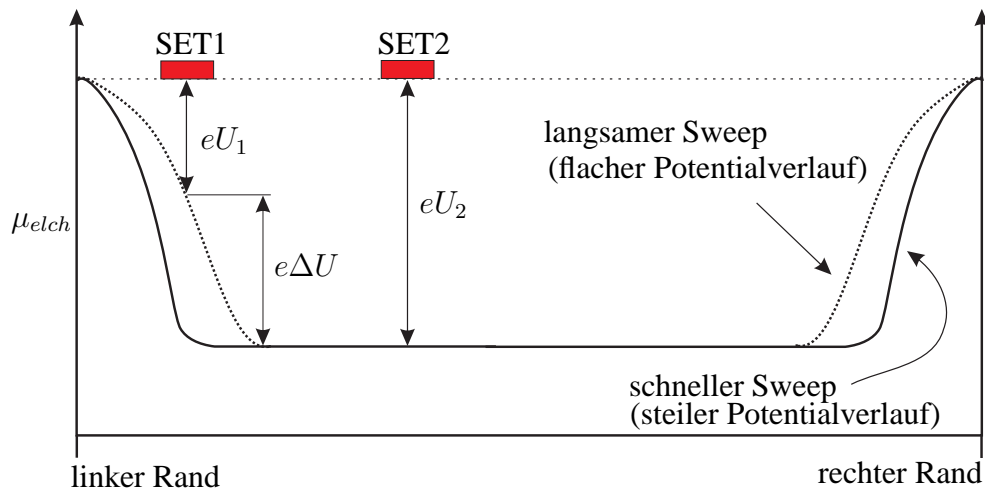


Abbildung 7.16: Modell zur Erklärung der Sweepratenabhängigkeit.

<sup>4</sup>Wenn man sich die oberen Meßkurven in Abbildung 7.15 genauer ansieht, so sieht man auch hier eine leichte Abhängigkeit von der Sweeprate. Da diese aber im Vergleich zum randnahen SET sehr gering ausfällt, ist die vereinfachte Darstellung an dieser Stelle gerechtfertigt.

## 7.5 Relaxationsprozesse bei kleinen Füllfaktoren

Bislang wurden immer nur Messungen gezeigt, bei denen die den Wirbelströmen zugeordneten Signale verhältnismäßig klein waren. Der mit Abstand stärkste gemessene Peak betrug  $U_{FB} \approx \pm 50$  mV bei  $\nu = 4$  in Abbildung 7.5.

Des weiteren sieht man bei einem Vergleich der Hystereseschleifen aus den letzten Abbildungen dieses Kapitels, daß die Amplituden von Probe zu Probe (auch Proben gleichen Materials) und sogar bei ein und derselben Probe von Abkühlzyklus zu Abkühlzyklus stark variieren. Sicherlich ist die Probenqualität der entscheidende Parameter. Hochbewegliche Proben zeigen eine schwächere Dämpfung und damit stärkere Wirbelströme als niederbewegliche.

Parallel zu meiner Arbeit hat Jan Hüls [Hül01] am Max-Planck-Institut in Stuttgart in einer Kooperation mit unserer Arbeitsgruppe ähnliche Messungen durchgeführt. Er hat die in diesem Kapitel beschriebenen Effekte auch beobachtet, konnte sie aber nicht so detailliert auswerten, wie in den letzten Abschnitten hier gezeigt worden ist. Ein Grund dafür kann sein, daß bei den von ihm verwendeten Proben mit Elektronenbeweglichkeiten von wesentlich mehr als  $10^6 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$  schon bei sehr kleinen Magnetfeldern stark ausgeprägte Wirbelströme auftreten<sup>5</sup>. Die Spannungspeaks liegen bei vergleichbaren Magnetfeldern ca. eine Zehnerpotenz über den stärksten von mir gemessenen (siehe Abbildung 7.17), bzw. treten bei Magnetfeldern auf, bei denen bei den von mir verwendeten Proben noch keine Wirbelströme meßbar waren.

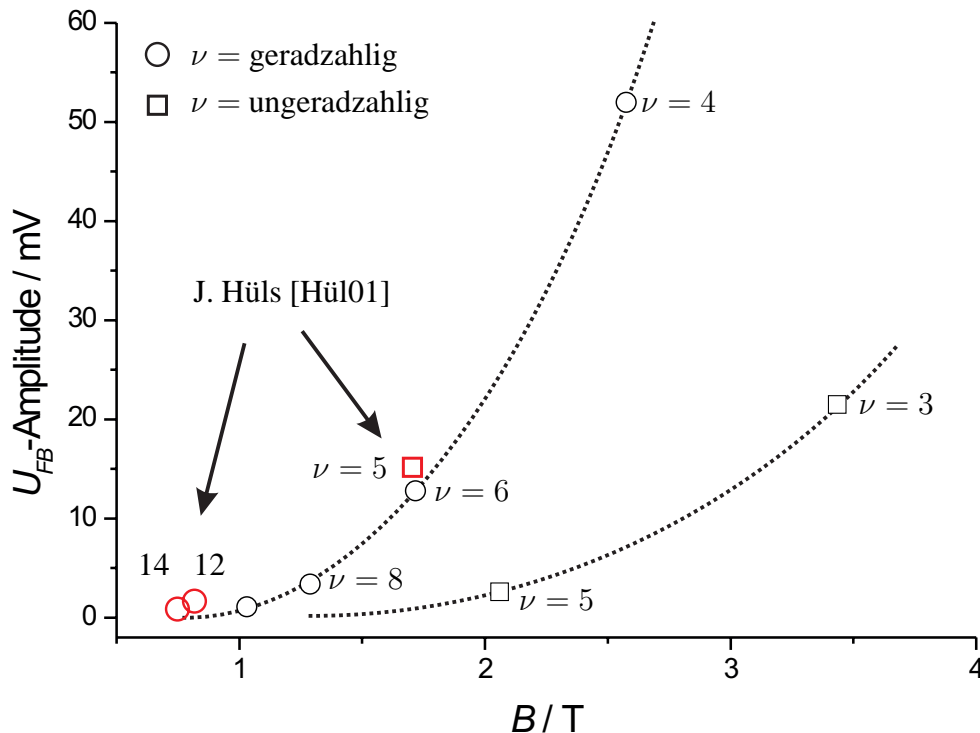


Abbildung 7.17: Peak-Spannungen der Hystereseschleifen (Füllfaktoren  $\nu = 3$  bis 10) aus Abbildung 7.5 im Vergleich mit denen der Arbeit von J. Hüls [Hül01] ( $\nu = 5, 12, 14$ ).

<sup>5</sup>Die Folge eines zu starken und sich sehr schnell aufbauenden Wirbelstromes ist, daß die Rückkopplerschleife nicht mehr in der Lage ist nachzuregeln und ihren Arbeitspunkt verliert.

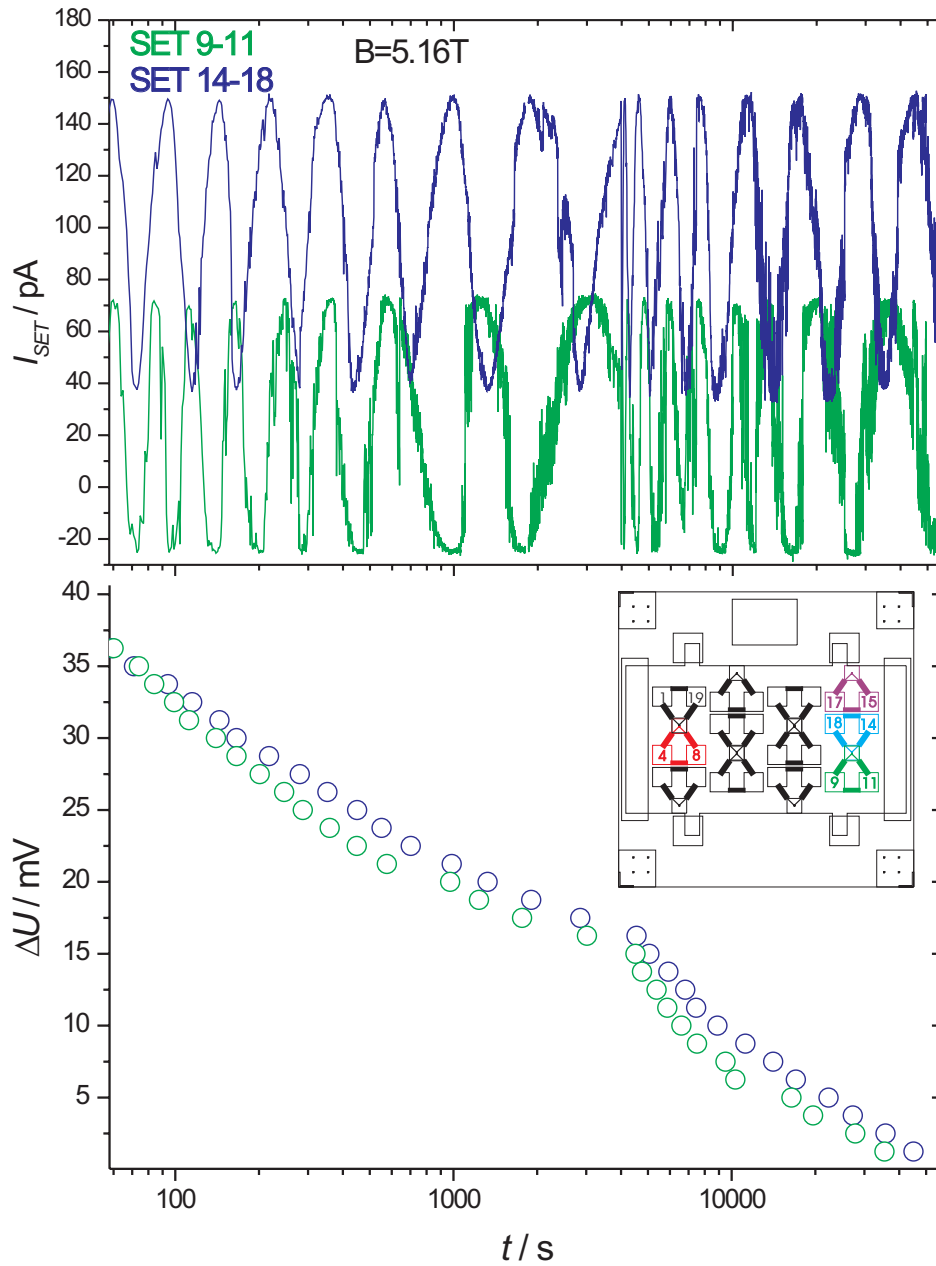


Abbildung 7.18: Oben: Stromfluß durch zwei SETs als Funktion der Zeit, nachdem das Magnetfeld von  $B=7$  T nach  $B=5.16$  T ( $\nu=1$ ) gesweept worden ist. Unten: Jede halbe Coulomb-Blockade-Oszillation entspricht einer Relaxation der sich während des Sweeps aufgebauten Spannung um  $\Delta U = 1.25$  mV.

Der experimentell gefundene Anstieg der induzierten Spannung mit dem Magnetfeld aus Abbildung 7.17 ist näherungsweise exponentiell. Extrapoliert man die Kurve für geradzählige (Landau-aufgespaltene) Füllfaktoren weiter bis zu Füllfaktor  $\nu = 2$ , so kommt man auf aufzubringende Rückkoppelspannungen  $U_{FB}$  von mehreren Volt. Die hier verwendete, für diese Anwendung opti-

mierte Meßelektronik erlaubt das nicht: Um die Proben vor Beschädigung<sup>6</sup> zu bewahren, wurden die möglichen Spannungen auf einen maximalen Bereich  $\Delta U_{FB} = \pm 100$  mV begrenzt.

Um bei Proben, die sehr starke Wirbelströme zeigen, auch bei höheren Magnetfeldern (i. A. bei den Füllfaktoren  $\nu = 1$  und  $\nu = 2$ ) messen zu können, muß daher ein anderer Weg eingeschlagen werden. Man kann z. B. ohne Rückkopplerschleife Relaxationsphänomene messen. Eine solche Messung funktioniert folgendermaßen: Man sweept ausgehend von einem Magnetfeld, das etwa einem halbzahligen Füllfaktor entspricht (das gesamte Innere der Probe ist kompressibel, es treten keine persistenten Wirbelströme auf), zu einem Magnetfeld, welches in der Nähe eines ganzzahligen Füllfaktors liegt. Nachdem der Sweep gestoppt wird, mißt man den Strom durch den SET als Funktion der Zeit. Abbildung 7.18 (oben) zeigt eine solche Messung. Das Magnetfeld wurde von  $B = 7$  T ( $\nu \approx 1.5$ ) auf  $B = 5.16$  T ( $\nu = 2$ ) reduziert. Während der folgenden 50 000 Sekunden treten an beiden SETs Coulomb-Blockade-Oszillationen auf, deren Frequenz etwa exponentiell abnimmt.

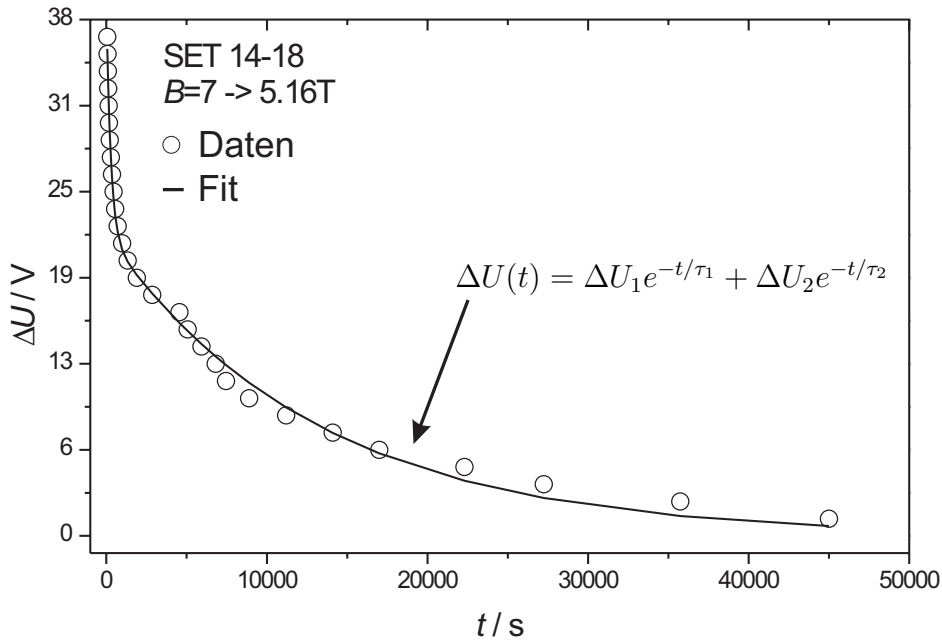


Abbildung 7.19: Relaxation der induzierten Spannungsdifferenz zwischen Rand und Zentrum an einer QHE-Probe, gemessen durch Abzählen der Coulomb-Blockade-Oszillationen. Die Daten lassen sich gut mit einer Funktion der Form  $\Delta U(t) = \Delta U_1 e^{-t/\tau_1} + \Delta U_2 e^{-t/\tau_2}$  anpassen, mit  $U_1 = 17$  mV,  $\tau_1 = 280$  s,  $U_2 = 22$  mV,  $\tau_2 = 13100$  s.

Die  $U_G$ -Periode der Coulomb-Blockade-Oszillationen beider SETs beträgt ca. 2.5 mV. Während des Sweeps hat sich also eine Ungleichgewichtssituation mit einer starken Spannung zwischen dem

<sup>6</sup>Es könnte z. B. passieren, daß aufgrund einer Störung die Rückkopplerschleife eine zu starke positive Spannung an den SET (mit Bondpads und Zuleitungen) anlegt. Dies ist die Durchlaßrichtung der Schottky-Diode, die aus der Heterostruktur und dem Aluminium auf der Oberfläche gebildet wird. So ein 'Durchschlagen' hat zur Folge, daß sich die elektronische Struktur in der Heterostruktur so stark verändert, daß nur ein kurzzeitiges Aufwärmen der Probe auf annähernd Zimmertemperatur wieder alte Bedingungen herstellt. Im schlimmsten Fall wird sogar der SET dabei zerstört.

inneren Bereich und dem Rand des 2DES aufgebaut, welche nach dem Anhalten des Sweeps über viele Stunden ins Gleichgewicht relaxiert.

Wie man sieht, oszilliert der Strom in beiden SETs nahezu synchron mit einer gewissen Phasenverschiebung. Trägt man die Anzahl der gezählten Maxima und Minima beider Kurven über die Zeit auf und multipliziert sie mit der halben Spannung der CBO-Periode, also ca. 1.25 mV, so erhält man daraus die relaxierte Spannung. Dies zeigt Abbildung 7.18 (unten). In einem Zeitintervall von fast 14 Stunden zählt man bei beiden SETs die gleiche Anzahl von Coulomb-Blockade-Oszillationen. Auch hier wird also wieder das Ergebnis bestätigt, daß es sich um einen globalen Wirbelstrom handelt.

Interessant ist auch, das Abklingverhalten zu quantifizieren. Da eine ausreichende Anzahl von Datenpunkten zur Verfügung steht, wurden die Daten mit einer Testfunktion der Form

$$\Delta U(t) = \Delta U_1 e^{-t/\tau_1} + \Delta U_2 e^{-t/\tau_2} \quad (7.13)$$

angepaßt (Abbildung 7.19). Es ergeben sich die beiden Relaxationszeiten  $\tau_1 = 280$  s und  $\tau_2 = 13100$  s. Auch Jones *et al.* [Jon95] konnten das Relaxationsverhalten ihrer Wirbelströme bei vergleichbaren Landau-Aufspaltungen nicht mit nur einer Relaxationszeit beschreiben, sondern fanden ebenfalls Zeiten von gleicher Größenordnung wie hier.

Ein Problem liegt aber in den bei der Anpassung bestimmten Spannungen. Mit  $\Delta U_1 + \Delta U_2 \approx 40$  mV liegen sie Größenordnungen unter dem zu erwartenden Wert der sich aufgebauten Spannung. Der Grund hierfür dürfte darin liegen, daß diese Meßtechnik ohne dem Einsatz der Rückkop-

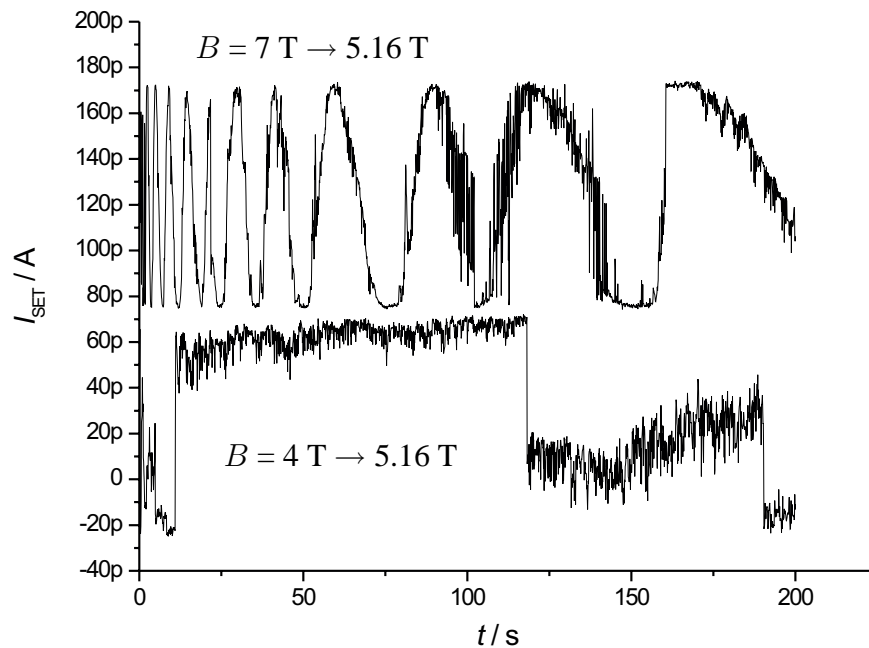


Abbildung 7.20: Stromfluß durch einen SET als Funktion der Zeit, nachdem das Magnetfeld von  $B = 7$  T ( $\nu = 1.5$ ) und von  $B = 4.1$  T ( $\nu = 2.5$ ) nach  $B = 5.16$  T ( $\nu = 1$ ) gesweept worden ist.

pelschleife viel zu stark in das System eingreift. Die Messungen mit der Rückkoppelschleife zeigen, daß z. B. bei negativem  $\dot{B}$  und positivem  $B$  die Rückkoppelschleife die Spannungsänderung unterhalb des SETs durch das Anlegen einer negativen Spannung kompensiert. In dieser Messung liegen der SET und der Rand des 2DES auf gleichem Potential. Die induzierte Spannungsänderung kann nicht durch die Rückkoppelschleife kompensiert werden und sorgt daher für eine elektrostatische Potentialdifferenz zwischen SET und 2DES. Diese - das wurde in Kapitel 6 gezeigt - erhöht die lokale Elektronendichte unterhalb des SETs, da der SET bezüglich des Elektronensystems auf einem positivem Potential liegt. Folgt man der Extrapolation aus Abbildung 7.17, dann wird die Spannung sogar so groß, daß ein Stromfluß vom 2DES ins Aluminium der SETs möglich wird. In umgekehrter Richtung hingegen wird das 2DES in der Nähe des SETs mitsamt Bondpads komplett verarmt.

Kurz gesagt: Der Einfluß der SETs auf das 2DES ist bei einer solchen Messung so stark, daß er nicht mehr vernachlässigt werden darf. Im einfachsten Fall kann die Spannung des SETs die Verteilung lokalisierter und delocalisierter Zustände in der Nähe des SETs ändern, im extremen Fall kann sogar ein Strom durch die Schottky-Barriere zwischen 2DES und SET fließen. Somit sind diese Meßwerte nur von qualitativer Natur und mit Vorsicht zu bewerten.

Um diese Aussage zu erhärten, wurde der Wert  $\nu = 2$  einmal von  $\nu = 1.5$  und gleich darauf von  $\nu = 2.5$  angefahren (Abbildung 7.20). Eigentlich würde man zwei ähnliche Kurven erwarten, was offensichtlich nicht der Fall ist. Nur wenn vom höheren Magnetfeld in den QHE-Plateaubereich gesweept wird, beobachtet man das Relaxationsverhalten.

Nichtsdestotrotz wurde diese Methode noch mit einem inneren und einem am Rand liegenden SET angewendet (Abbildung 7.21). Man beobachtet am innen liegenden Transistor (SET 9-11) etwa doppelt so viele Oszillationen wie am äußeren (SET 15-17). Dies läßt den Schluß zu, daß außen der Hauptanteil der induzierte Spannungsdifferenz extrem schnell (nicht auflösbar) relaxiert, während weiter innen dieser Vorgang langsamer abläuft und zum Teil mit dieser Meßtechnik aufgelöst werden kann. Aufgrund der wenigen aufgenommenen Meßwerte, die nur einen Ausschnitt des Relaxationsprozesses beschreiben, lieferten Versuche, die Daten mit der Testfunktion 7.13 anzupassen, keine sinnvollen Ergebnisse.

Auch wenn man nach der vorangegangenen Argumentation keine quantitativen Schlüsse aus diesen Messungen ziehen darf, bestätigt auch diese Messung wenigstens qualitativ, daß die Relaxationszeiten am Rand kürzer sind als im Zentrum einer Probe.

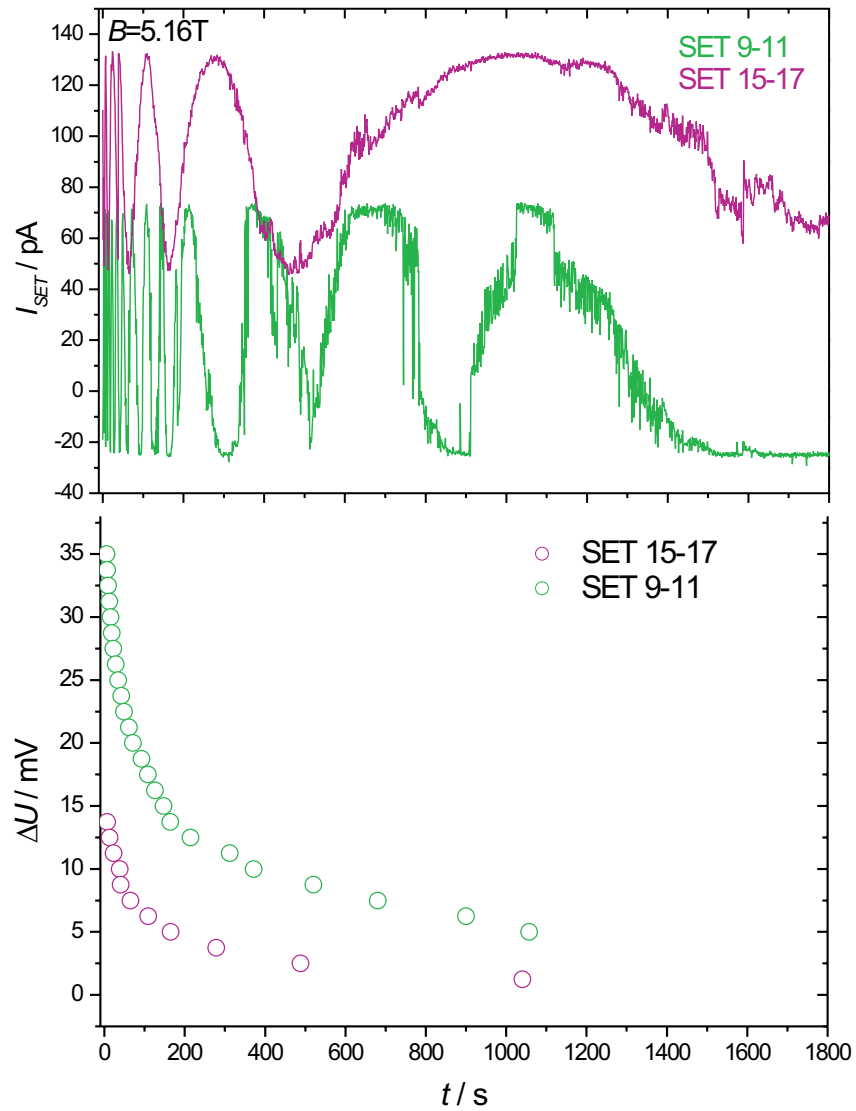


Abbildung 7.21: Oben: Stromfluß durch einen im Zentrum des Hall-Barrens liegenden (SET 9-11) und einen  $50 \mu\text{m}$  vom Rand entfernten SETs (SET 15-17) als Funktion der Zeit, nachdem das Magnetfeld von  $B = 7 \text{ T}$  nach  $B = 5.16 \text{ T}$  ( $\nu = 2$ ) gesweept worden ist. Unten: Jede halbe Coulomb-Blockade-Oszillation entspricht einer Relaxation der sich während des Sweeps aufgebauten Spannung um  $\Delta U = 1.25 \text{ mV}$ .

## 7.6 Temperaturabhängigkeit der Wirbelstromstärke

Eine weitere noch zu beantwortende Frage ist natürlich, wie sich dieser Effekt bei unterschiedlichen Temperaturen verhält. Der SET ist, wie in Kapitel 3 gezeigt, eine Sonde, welche selbst sehr temperaturempfindlich ist und sogar als Thermometer eingesetzt werden kann [Ber99, Ber01].

Es kommen daher nur sehr gute, also extrem kleine SETs für Messungen bei höheren Temperaturen in Frage. Wichtig ist dabei nicht, daß man bei höherer Temperatur noch eine ausgeprägte Coulomb-Blockade sieht. Für die Rückkoppelschleife reicht es aus, wenn überhaupt Coulomb-Blockade-Oszillationen auftreten. Die Leitfähigkeit muß in den Leitfähigkeitsminima nicht auf Null absinken. Die Fertigung von Transistoren, die für eine Anwendung bei höheren Temperaturen geeignet sind, ist eine Gratwanderung. Wenn man extrem kleine Tunnelkontakte haben möchte, muß zwangsweise am Rande der von den Maschinen gebotenen Auflösung gearbeitet werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Tunnelkontakt überhaupt nicht funktioniert, ist daher sehr hoch. Dennoch ist es gelungen, einige SETs zu fertigen, die bei Arbeitstemperaturen oberhalb eines Kelvins noch nutzbar waren.

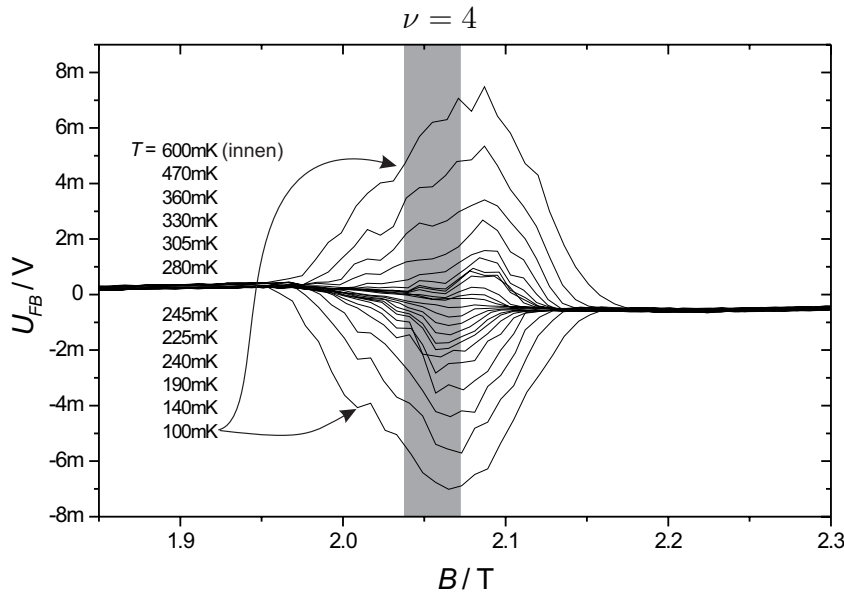


Abbildung 7.22: Signal der Rückkoppelschleife (Typ I)  $U_{FB}$  eines Transistors bei Temperaturen zwischen  $T = 100$  mK (äußeres Kurvenpaar) und  $T = 600$  mK (inneres Kurvenpaar).

Abbildung 7.23 zeigt die mit einem dieser SETs gemessene Temperaturabhängigkeit der auftretenden Wirbelströme exemplarisch bei drei verschiedenen Temperaturen. In Abb. 7.23 a) sind vier Sweeps bei den Temperaturen  $T = 25$  mK und  $T = 300$  mK zu sehen. Bei  $T = 25$  mK treten bei  $\nu = 6, 4$  und  $\nu = 3$  gut detektierbare Wirbelströme auf.

Bei  $T = 300$  mK sind außer bei  $\nu = 4$  keine Hystereseschleifen mehr meßbar, bzw. so schwach, daß sie in dieser Auftragung nicht mehr sichtbar sind. In der Abbildung darunter, bei  $T = 1.35$  K, sind außer beim Füllfaktor  $\nu = 2$  keine Anzeichen für Wirbelströme mehr sichtbar.



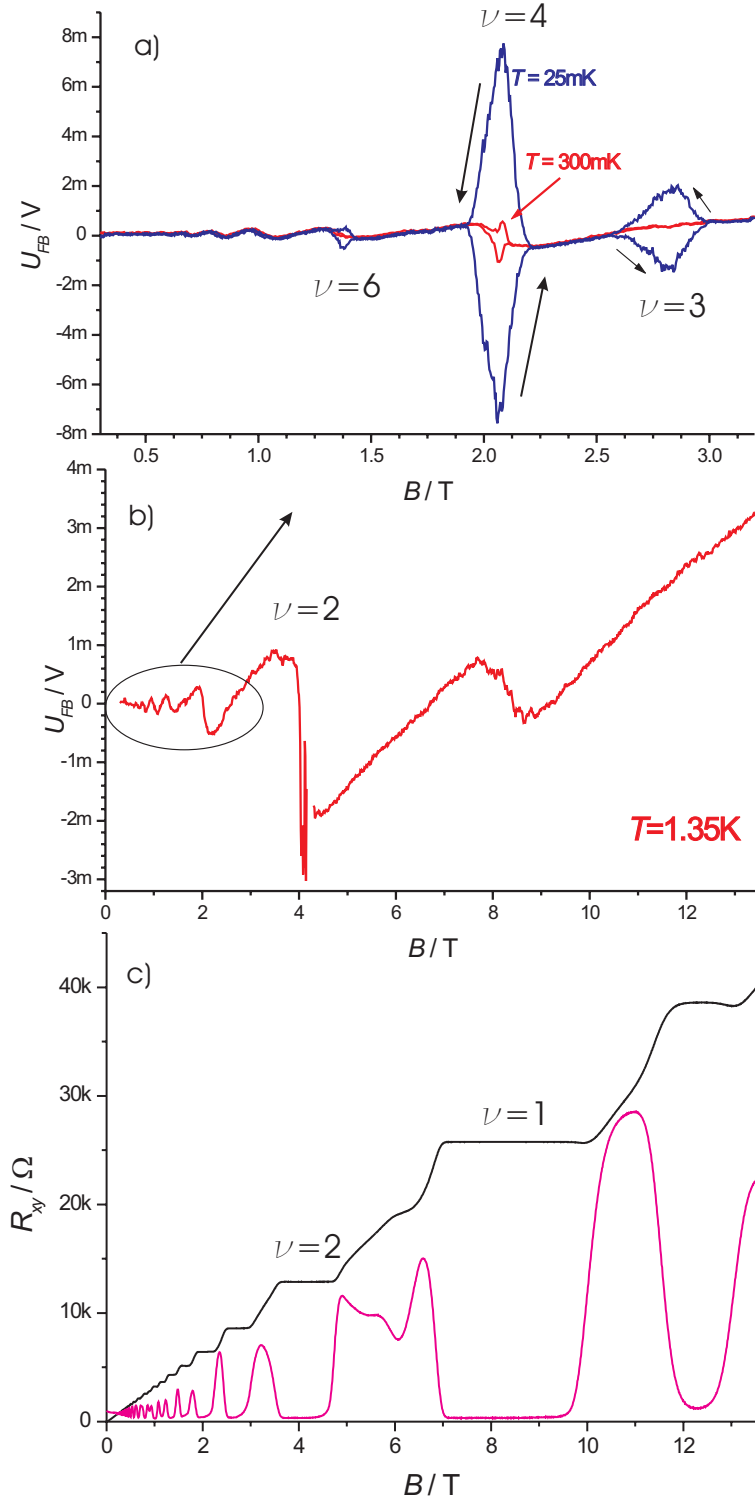


Abbildung 7.23: a) Signal der Rückkoppelschleife (Typ I)  $U_{FB}$  eines sich auf einem Hall-Barren befindlichen Transistors bei  $T = 25\text{ mK}$  und  $T = 300\text{ mK}$ . b) Signal der Rückkoppelschleife  $U_{FB}$  des Transistors aus (a) bei  $T = 1.3\text{ K}$ . c)  $R_{xy}$  und  $R_{xx}$  (nicht maßstäblich) des Hall-Barrens (separat gemessen).

Bei  $\nu = 2$ , dem Füllfaktor mit der größten Energielücke, ist das Signal jedoch immer noch so stark, daß die Rückkoppelschleife dort übersteuert wird.

Für eine ausgiebige Untersuchung über das Verhalten der Wirbelstromstärke als Funktion der Temperatur bietet sich demnach das Magnetfeldintervall um den Füllfaktor  $\nu = 4$  an. Wie Abbildung 7.22 zeigt, sind dort die Wirbelströme über einen großen Temperaturbereich auflösbar. Eine quantitative Analyse der Amplitude der Graphen aus Abbildung 7.22 ist in Abbildung 7.24 gezeigt. Die Datenpunkte liegen alle auf einer Exponentialfunktion der Form

$$U = U_0 \cdot e^{-T/T_0} \quad (7.14)$$

$$= U_0 e^{-k_B T/E_0} . \quad (7.15)$$

Ein Anpassen der Datenpunkte liefert ein  $T_0$  von 127 mK, was der Energie  $E_0$  von  $10.9 \mu\text{eV}$  entspricht.

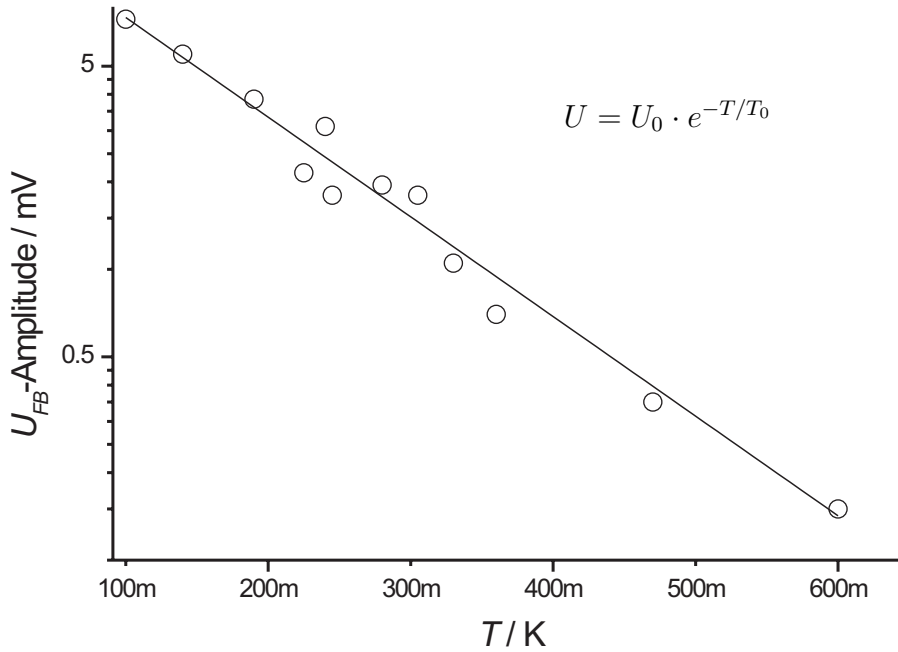


Abbildung 7.24: Signal der Rückkoppelschleife  $U_{FB}$  eines Transistors bei Temperaturen zwischen 100 mK und 600 mK.

Ähnliche Ergebnisse erhielten auch A. Matthews *et al.* [Mat00] mit Magnetisierungsmessungen. Sie setzen voraus, daß die induzierten Wirbelströme eine Stromstärke haben, die knapp unterhalb der kritischen Stromstärke  $I_c$  liegt, ab der der Breakdown [Nach99] des Quanten-Hall-Effekts einsetzt. Diese Temperaturabhängigkeit läßt sich laut [Mat00] mit dem QUILLS<sup>7</sup>-Modell [Eav86] erklären. Im QUILLS-Modell setzt der Breakdown des QHEs dadurch ein, daß ab einem kritischen Hall-Feld die Ladungsträger vom höchsten besetzten Landau-Niveau ins unterste unbesetzte tunneln. Der Impuls kann entweder durch Streuung an Verunreinigungen oder mit Phononen erhalten

<sup>7</sup>quasi-elastic inter-Landau-level scattering

werden. Ist die Verunreinigungskonzentration gering, so überwiegt das Streuen an Phononen. Bei einer Temperaturerhöhung steigt die Phononendichte und damit auch die Wahrscheinlichkeit für einen Streuprozess. Daß die Dämpfung der hier beobachteten Effekte exponentiell mit der Temperatur ansteigt, spricht also für einen Phononen-unterstützten QUILLS-Prozess als Dämpfungsmechanismus.

In Abbildung 7.25 ist die Situation skizziert, wie sie während einer Variation des Magnetfeldes im Bereich eines QHE-Plateaus vorliegt. Über einen inkompressiblen Bereich der Breite  $\Delta y = y_2 - y_1$  fällt die Spannung  $U_H$  ab, wodurch die Landau-Niveaus gekippt werden. Wird dabei eine kritische Feldstärke  $F_c = \frac{U_H}{\Delta y}$  überschritten, so können Elektronen aus dem obersten besetzten Landau-Niveau ins unterste unbesetzte tunneln, und es setzt Dissipation ein. Innerhalb des inkompressiblen Streifens fließt demnach ein Strom, dessen Stromdichte knapp unterhalb des kritischen Wertes  $J_c = \sigma_{xy} F_c$  bleibt.

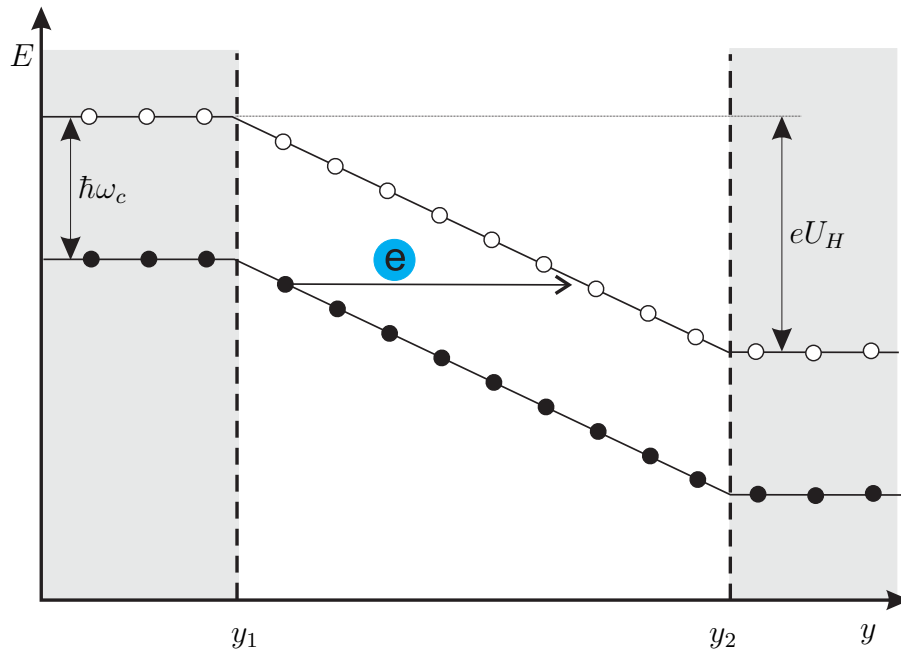


Abbildung 7.25: Schema eines QUILLS-Prozesses nach [Eav86]. Über einen inkompressiblen Streifen fällt die elektrostatische Potentialdifferenz  $eU_H$  ab. Die Relaxation dieser Spannung geschieht über inter-Landau-Niveau Streuprozesse.

Mit  $U_H = R_{xy} I_c$  entsprechen die 8 mV Hall-Spannung der Messung aus Abbildung 7.24 bei  $T = 100$  mK und  $\nu = 4$  einem Strom von  $I_c \approx 1.25 \mu\text{A}$ . Schätzt man die Breite des Strompfades auf  $\Delta y \approx 10 \mu\text{m}$ , was der Größenordnung nach (vgl. [Ahl02]) realistisch erscheint, so entspricht dies einer kritischen Stromdichte von  $J_c \approx 0.125 \text{ A/m}$  oder einer kritischen Feldstärke von  $F_c \approx 800 \text{ V/m}$ .

Bei der Messung aus Abbildung 7.5 hingegen wird mit mehr als 50 mV bei  $\nu = 4$  eine deutlich größere Spannung gemessen. Dies entspricht unter gleichen Annahmen einem kritischen Strom von  $I_c \approx 8 \mu\text{A}$ , was unter der Annahme einer Streifenbreite von  $\Delta y \approx 10 \mu\text{m}$  einer kritischen Stromdichte von  $J_c \approx 0.8 \text{ A/m}$  oder einer kritischen Feldstärke von  $F_c \approx 5 \text{ kV/m}$  entspricht.

Auch wenn diese Werte von gleicher Größenordnung wie die anderer Breakdown-Messungen (z. B. [Kaw96]) sind, so sind sie mit klassischen Transportmessungen aufgrund der unterschiedli-

chen Meßmethode doch nur bedingt vergleichbar. Vor allem aufgrund der ungenauen Kenntnis der Streifenbreite sind sie nur eine sehr grobe Abschätzung.

## 7.7 Zusammenfassung

Ein 2DES im Quanten-Hall-Regime wird durch eine Magnetfeldänderung aus dem thermodynamischen Gleichgewicht gebracht. Dies äußert sich darin, daß durch die Variation des Magnetfeldes Ladungsträger vom Bulk- zum Randbereich des 2DES verschoben werden und umgekehrt. Dieser Transfer von Ladungsträgern hat eine elektrostatische Potentialdifferenz zwischen Bulk- und Randbereich des 2DES zur Folge, welche aufgrund des anliegenden Magnetfeldes die Hall-Spannung eines induzierten Wirbelstromes ist.

Korrelationsmessungen mit an unterschiedlichen Orten eines Hall-Barrens positionierten SETs (Abschnitt 7.2) zeigen, daß diese induzierte Potentialdifferenz in einem schmalen Bereich am Rand einer Probe abfällt und der Bulkbereich dabei eine Art Equipotentialfläche bildet. Im folgenden Abschnitt (7.3) wird durch Messungen, bei denen ein zusätzliches Seitengate den Rand des 2DES elektrostatisch in Richtung des SETs verschiebt, gezeigt, daß der Bereich des Spannungsabfalls mit der Position des innersten inkompressiblen Streifens zusammenfällt.

Wird ein Sweep im Bereich eines ganzzahligen Füllfaktors gestoppt oder extrem langsam durchgeführt, läßt sich die Dynamik des Prozesses beobachten. Die Korrelationsmessungen aus den Abschnitten 7.3 und 7.5 lassen den Schluß zu, daß sich ein im gesättigten Fall sehr steiler elektrostatischer Potentialgradient am Rand der Probe beim Relaxieren ins Zentrum ausbreitet und sich dabei abschwächt. Diese Relaxationsprozesse können bei hohen Magnetfeldern und tiefen Temperaturen viele Stunden andauern.

Im Bereich ganzzahliger Füllfaktoren nimmt der innerste inkompressible Streifen den gesamten Bulkbereich des 2DES ein. Die Vorstellung eines Wirbelstromes in diesem Streifen muß also in diesem Regime etwas erweitert werden: Aufgrund der intrinsischen Potentialfluktuationen ist der Bulkbereich in kompressible und inkompressible Bereiche, innerhalb derer Wirbelströme fließen können, unterteilt. Werden hier jetzt viele (in etwa gleich starke) einzelne Wirbelströme induziert, dann heben sich diese im Bulk auf und bilden einen Nettostrom. Dieser fließt dann wieder im inkompressiblen Randbereich, da dieser das größte zusammenhängende inkompressible Gebiet darstellt.

Das Phänomen der Sättigung läßt sich dabei nach einem in Abschnitt 7.3 abgeleiteten Modell mit einer kritischen Hall-Feldstärke  $F_c = \frac{\text{Hall-Spannung}}{\text{Streifenbreite}}$  erklären. In dem Bereich, in dem das Hall-Feld vorliegt, fließt ein Wirbelstrom nahe der kritischen Stromdichte  $J_c = \sigma_{xy} F_c$ , ab der der Breakdown des QHEs einsetzt. Wird die Hall-Feldstärke zu groß, können Elektronen aus dem obersten besetzten Landau-Niveau unterhalb des Fermi-Niveaus ins unterste unbesetzte Landau-Niveau oberhalb des Fermi-Niveaus angeregt werden. Die inkompressiblen Bereiche werden leitend, und der Wirbelstrom bricht auf einen Wert unterhalb der kritischen Stromdichte zusammen.

## Kapitel 8

# Der Einfluß eines extern aufgeprägten Stromes

Die in den letzten Kapiteln vorgestellten Messungen haben einen entscheidenden Unterschied zu der Situation, in der normalerweise der Quanten-Hall-Effekt gemessen wird: Es floß kein extern aufgeprägter Strom. Eine QHE-Messung läuft in der Regel derartig ab, daß an den beiden äußeren Kontakten des Hall-Barrens eine Stromquelle angeschlossen wird, die einen konstanten Strom von einigen  $\mu\text{A}$  durch die Probe treibt. Während dann das Magnetfeld variiert wird, werden an den Potentialkontakten die Spannungen  $U_x$  und  $U_y$  gemessen<sup>1</sup>.

Die Frage nach dem Weg, den ein Strom durch die Probe wählt, ist genauso alt wie der Quanten-Hall-Effekt selbst und jede Messung oder Berechnung der Stromprofile findet eine große Anzahl von Befürwortern und gewöhnlich eine mindestens ebenso große Anzahl von Kritikern.

Die ersten Versuche, experimentell das Hall-Potentialprofil über einen Hall-Barren zu messen, verwendeten eine Reihe Kontakte im Innern des Hall-Barrens [Ebe85, Zhe85, Sic85]. Das Ergebnis dieser Messungen war ein homogener Spannungsabfall über die Probe bei nichtganzzahligen Füllfaktoren und ein eher 'scharfer', mit dem Magnetfeld durch die Probe wandernder Spannungsabfall im Bereich ganzzahliger Füllfaktoren (siehe [Nach99]). Das Problem dieser Messungen ist aber sicherlich der nicht wegzudiskutierende Einfluß der inneren Kontakte auf das zweidimensionale Elektronensystem.

Eine sehr bekannte Arbeit, die wesentlich weniger mit dem Elektronensystem wechselwirkt, stammt von Klass *et al.* [Kla92]. Klass *et al.* verwendeten einen Film aus suprafluidem Helium, um mit Hilfe des Fontäneneffektes dissipative Gebiete sichtbar zu machen. Beobachtet wurden kleine 'heiße' Gebiete, die an entgegengesetzten Ecken des Hall-Barrens liegen. Die restlichen Bereiche des verwendeten Hall-Barrens scheinen in diesen Messungen frei von Dissipation zu sein.

Weitere Experimente [Fon91, Fon92, Kno94, Kno95] nutzten den *elektro-optischen Pockels-Effekt*. Elektrische Felder innerhalb einer Probe ändern die doppelbrechenden Eigenschaften von GaAs. Dies eröffnet die Möglichkeit, mit ortsaufgelösten Polarisationsmessungen auf die Potentialverteilung innerhalb einer Probe rückzuschließen. Leider war die Ortsauflösung mit ca.  $50\text{ }\mu\text{m}$  sehr eingeschränkt. Die enorme Weiterentwicklung von Raster-Sondenmikroskopen gegen Ende der 90er Jahre, die auch Raster-Sondenbetrieb im Tieftemperaturbereich möglich machte, eröffnete durch die gute Ortsauflösung dieser Mikroskope viele neue Möglichkeiten. Tessmer *et al.*

---

<sup>1</sup>Zur Erinnerung: Bei sämtlichen Potentialmessungen mit SETs aus den letzten Kapiteln waren alle sechs Kontakte des Hall-Barrens kurzgeschlossen.

[Tes98] und Finkelstein *et al.* [Fin00, Fin00a] konzentrierten sich mit ihren Messungen mit einem Kapazitätsmikroskop hierbei allerdings nicht auf den Stromfluß, sondern vielmehr auf lokale Kompressibilitätsmessungen am Elektronensystem und wiesen damit kompressible und inkompressible Bereiche im Innern eines 2DES nach. Auch die Messungen von Yoo [Yoo97], Hess [Hes98], Yacoby [Yac99] und Ilani *et al.* [Ila04] mit einem rasternden SET auf einer Glasfaserspitze beschäftigten sich mit den lokalen Eigenschaften des 2DES und nicht mit der Bestimmung des Ortes, an dem der Strom durch eine Probe fließt.

Direkte elektrostatische Untersuchungen an einer typischen Hall-Geometrie wurden - meines Wissens nach - nur von Mc Cormick [McC99] *et al.*, Peter Weitz [Wei00] *et al.* und Erik Ahlswede

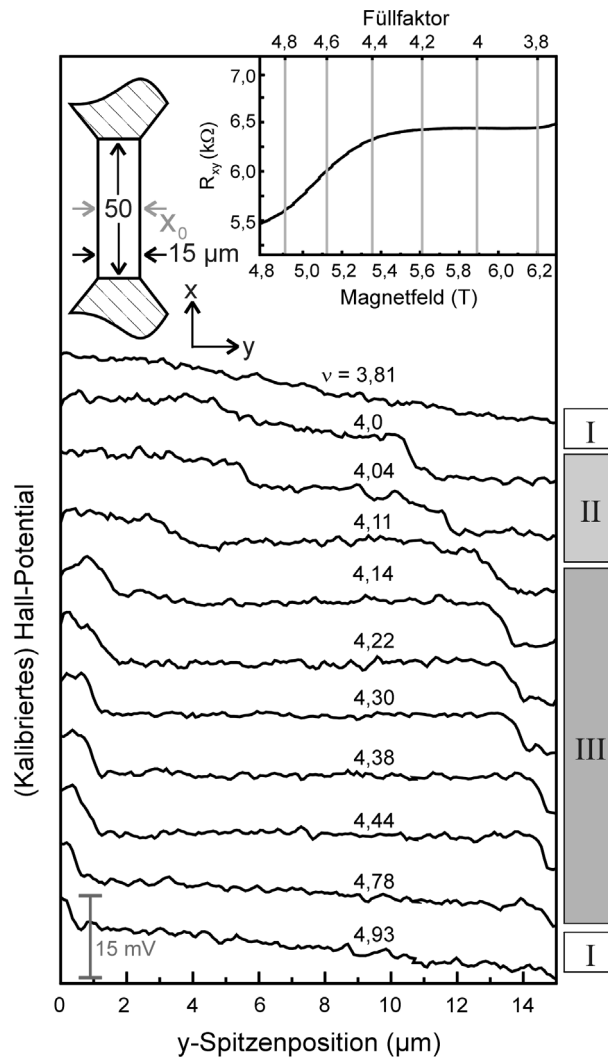


Abbildung 8.1: Messung der Hall-Potentialprofile für Füllfaktoren um  $\nu = 4$  von Erik Ahlswede [Ahl02]. Gemessen wurde mit einem Tieftemperatur Raster-Kraft-Mikroskop bei einer Temperatur von  $T = 1.5$  K in der Mitte eines schmalen Hall-Barrens (im kleinen Bild skizziert). Zur besseren Unterscheidung ist den einzelnen Kurven ein konstanter Betrag hinzu addiert worden. Die maximale Hall-Spannungsamplitude beträgt 15 mV, was bei  $\nu=4$  einem Gesamtstrom von  $I = 2.3 \mu\text{A}$  entspricht. Es lassen sich drei verschiedene Potentialprofiltypen (Typ I, II und III) klassifizieren, wie rechts markiert. Zusätzlich ist rechts oben der separat gemessene Hall-Widerstand im Bereich des entsprechenden Plateaus gezeigt.

*et al.* [Ahl02, Ahl01] durchgeführt. Die von Erik Ahlswede durchgeführten Messungen [Ahl02, Ahl01] sind für diese Arbeit nicht nur sehr interessant, weil sie die neuesten sind und aktuell die bestmögliche Auflösung bieten, sondern vielmehr auch deshalb, weil sie in einem Verbundprojekt zwischen unserer Arbeitsgruppe an der PTB und der Arbeitsgruppe von Jürgen Weis (Abteilung K. v. Klitzing) am Max-Planck-Institut in Stuttgart zeitgleich entstanden sind.

Abbildung 8.1 zeigt eine typische Messung aus der Dissertation von Erik Ahlswede [Ahl02]. Durch eine Probe, deren Geometrie in der kleinen Abbildung (oben links) skizziert ist, fließt ein Wechselstrom, welcher aufgrund der sehr geringen Frequenz von 3.4 Hz quasi als Gleichstrom anzusehen ist. Die Hall-Spannung dieses Stromes verändert die Eigenfrequenz des Cantilevers der Raster-Kraft-Spitze, woraus sich dann der entsprechende Hall-Spannungsabfall berechnen läßt. Bei den gezeigten Messungen wurde jeweils bei konstantem Magnetfeld um den Füllfaktor  $\nu = 4$  herum die Spitze über den Hall-Barren gefahren und somit die Hall-Spannungsverteilung über den Hall-Barren bei unterschiedlichen Magnetfeldern gemessen. Zu Beginn des Plateaus ( $4.5 \geq \nu \geq 4.1$ ) beobachtet man, daß die Hall-Spannung zu etwa gleichem Anteil an beiden Rändern der Probe abfällt (als Potentialprofiltyp III bezeichnet). Dieser Bereich ist erst sehr schmal, wird dann aber mit zunehmendem Magnetfeld immer breiter. Bei Magnetfeldern knapp unterhalb  $B(\nu = 4)$  geht dieser Verlauf in einen nichtlinearen Spannungsabfall über die gesamte Probenbreite über (als Typ II bezeichnet). Am 'Ende' des Plateaus, bei  $\nu = 3.8$ , beobachtet man einen näherungsweise linearen Abfall über die gesamte Probenbreite (als Typ I bezeichnet).

Der Ort des Hall-Spannungsabfalls fällt demnach zu Beginn eines Plateaus mit dem Ort des innersten inkompressiblen Streifens zusammen. Dies läßt den Schluß zu, daß in diesem Regime ein extern aufgeprägter Strom im innersten inkompressiblen Streifen fließt. Zu diesem Ergebnis kamen 2003 auch *Güven und Gerhards*, als sie mit Rechnungen [Gue03] diesen Verlauf bestätigen konnten.

Mit den Experimenten von Ahlswede *et al.* zur Bestimmung des Hall-Spannungsabfalls können Messungen mit einem stationären SET natürlich nur sehr bedingt verglichen werden, da dieser ortsfest ist und der Rand des 2DES nur über einen sehr begrenzten Bereich elektrostatisch verschoben werden kann. Die hohe Ortsauflösung, begründet durch die Nähe des SETs zum 2DES, gepaart mit der extremen Empfindlichkeit, machte allerdings einige sehr interessante Versuche mit dem SET möglich, die, wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, die im Stuttgarter Max-Planck-Institut gewonnenen Ergebnisse bestätigen.

## 8.1 Experimenteller Aufbau

Um eine Potentialmessung mit einem SET durchführen zu können, während eine Stromquelle einen Strom durch die Probe treibt, mußte die schon in letzten Kapitel vorgestellte Meßelektronik noch ein weiteres Mal geringfügig modifiziert werden. Das Ergebnis ist in Abbildung 8.2 zu sehen. Es liegt nur noch ein Stromkontakt des Hall-Barrens auf *Masse*, während auf der anderen Seite eine Stromquelle für einen konstanten Strom  $I$  durch die Probe sorgt. Die Spannungen  $U_x$  und  $U_y$  wurden während dieser Messungen nicht abgegriffen, um die Anzahl der angeschlossenen Meßgeräte so gering wie möglich zu halten.

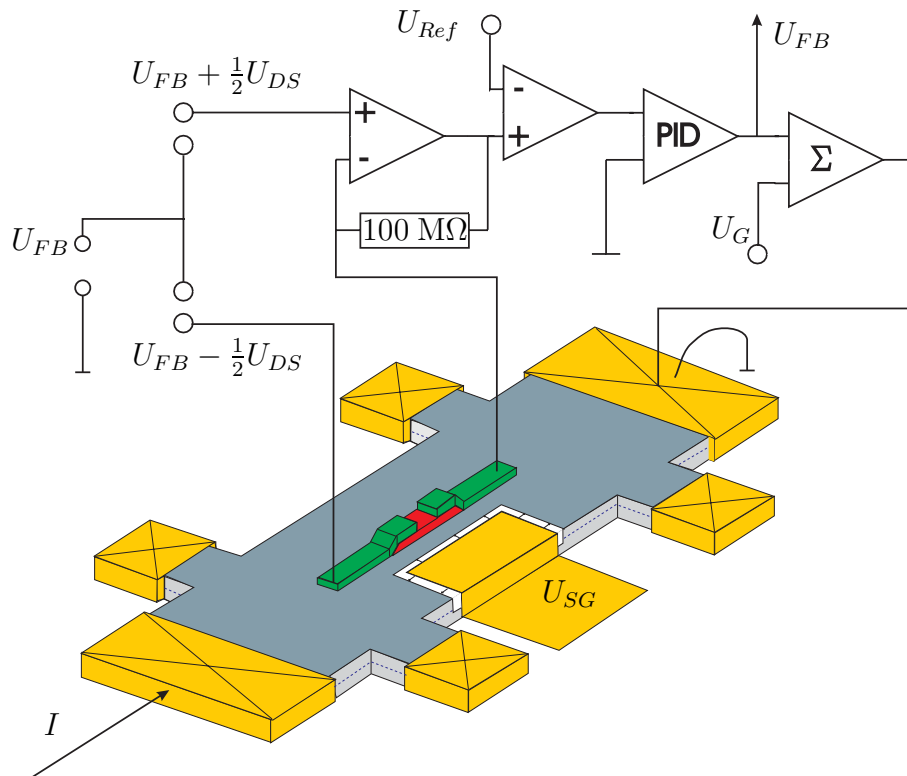


Abbildung 8.2: Modifizierte Meßelektronik, die Potentialmessungen mit einem SET in Rückkoppeltechnik ermöglicht, während eine Stromquelle einen Strom durch die Probe treibt.

## 8.2 Gibt es noch Wirbelströme?

Die erste Frage, die sich im Anschluß an das letzte Kapitel stellt, ist, ob Wirbelströme existieren, wenn ein extern aufgeprägter Strom durch die Probe fließt. Abbildung 8.3 zeigt vier Messungen der Rückkoppelspannung eines SETs, welcher sich in einer Entfernung von  $11 \mu\text{m}$  vom Rand der Probe befindet. Am in  $1 \mu\text{m}$  Entfernung zum SET befindlichen Seitengate war keine Spannung angelegt. Bei den unterschiedlichen Messungen floß zu Beginn ein verschwindend geringer<sup>2</sup> Strom, der dann in drei Schritten auf  $I = 2 \mu\text{A}$  erhöht worden ist.

<sup>2</sup>Die Stromquelle war nicht perfekt auf Null abgeglichen.



In den dissipativen Bereichen, abseits der QHE-Plateaus, sieht man den Spannungsabfall der SdH-Oszillationen in der Feedback-Spannung, was auch zu erwarten ist. In den Plateaubereichen zeigen sich bei allen vier Kurven die den induzierten Wirbelströmen zugesprochenen Peaks, was die anfangs gestellte Frage eindeutig mit *Ja* beantwortet.

Es lohnt sich aber noch ein genaueres Hinsehen, denn mit steigender Stromstärke  $I$  verändert sich die Form der Peaks auf ihrer niedermagnetischen Seite drastisch. Die Hystereseschleife der grünen Kurve ohne Strom ist eine Einhüllende für die drei weiteren Kurven. Mit steigendem Strom springen diese im Anfangsbereich des Plateaus immer später auf die Einhüllende, was bedeutet, daß mit steigendem Strom ein quasi dissipationsfreier Wirbelstrom erst bei höheren Magnetfeldern möglich wird. Dies läßt sich dadurch erklären, daß diesmal nicht nur der Wirbelstrom  $I_W$ , sondern auch noch der extern aufgeprägten Strom  $I$  durch die Probe fließt. Vergrößert man ausgehend von einem halbzahligen Füllfaktor das Magnetfeld in Richtung eines ganzzahligen Füllfaktors, so wird der Längswiderstand  $R_{xx}$  irgendwann gleich null, der QHE setzt ein. Die Breakdown-Ströme  $I_c$  werden um so größer, je weiter man sich auf der Magnetfeldachse vom Rand des Plateaus dem ganzzahligen Füllfaktor nähert (siehe z. B. [Nach99] oder [Sch96]). Ist also der aufgeprägte Strom  $I$  bei gegebenem Magnetfeld  $B$  noch nicht kleiner als der Breakdown-Strom  $I_c$ , so kann sich ihm auch kein zusätzlicher dissipationsfreier Wirbelstrom überlagern. Überschreitet  $I_c$  mit steigendem  $B$  die Stromstärke  $I$ , so kann der Wirbelstrom einsetzen. Eine wichtige Schlußfolgerung hieraus

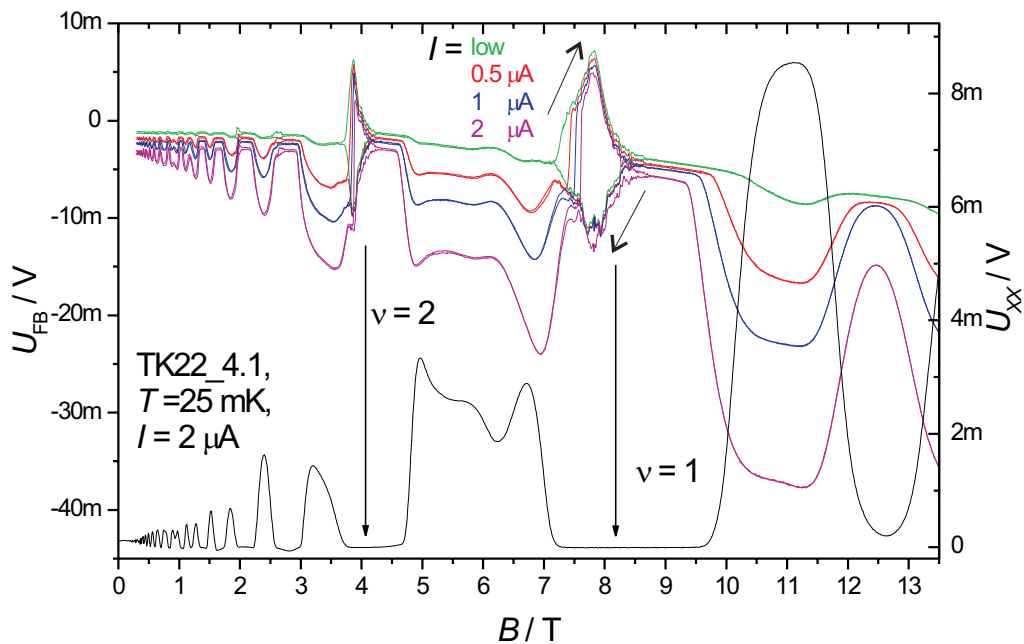


Abbildung 8.3: Signal der Rückkopplerschleife  $U_{FB}$  eines SETs, der sich im Randbereich des Hall-Barrens befindet. Der Probenstrom wurde zwischen den einzelnen Messungen von  $I \approx 0$  auf  $I = 2 \mu\text{A}$  erhöht. Das Seitengate war während der Messung nicht aktiviert.

ist, daß in diesem Regime die Wirbelströme im gleichen Bereich der Probe induziert werden, in dem auch ein extern aufgeprägter Strom fließt.

Bei der folgenden Messung in Abbildung 8.5 wurde, wie schon in den letzten beiden Kapiteln hinreichend beschrieben, der Rand des 2DES mit einem Seitengate elektrostatisch in Richtung SET verschoben. Zur Erinnerung: Bei  $U_{SG} = 0$  ist der SET 11  $\mu\text{m}$  vom Rand des 2DES entfernt, bei  $U_{SG} = -0.3 \text{ V}$  hingegen beträgt der Abstand nur noch einen Mikrometer. Ein weiteres Erhöhen der (negativen) Seitengate-Spannung verschiebt den Rand weiter in Richtung SET gemäß Gleichung 6.5.

Demnach bekräftigen diese Messungen noch einmal das, was wir im letzten Kapitel schon gelernt haben, nämlich daß die Wirbelströme im Bereich des innersten inkompressiblen Streifen fließen. Was diese Meßreihe allerdings noch einmal sehr schön zeigt, ist die Schärfe des Sprungpunktes, ab dem die Wirbelströme *anspringen*.

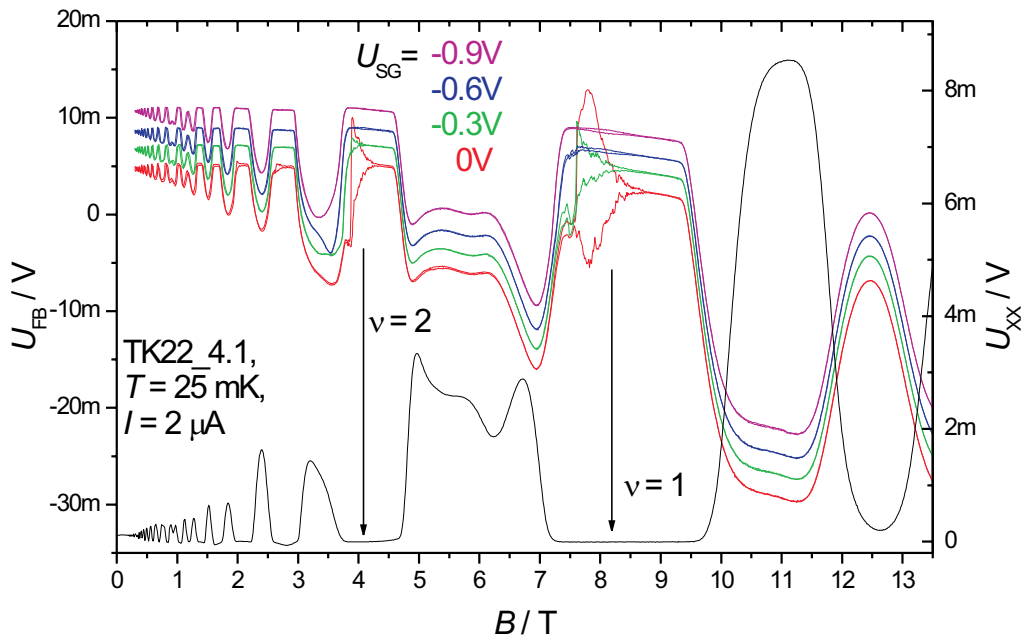


Abbildung 8.4: Signal der Rückkoppelschleife  $U_{FB}$  eines SETs, der sich im Randbereich des Hall-Barrens befindet. Der Probenstrom betrug während aller Messungen  $I = 2 \mu\text{A}$ , die Seitengate-Spannung wurde schrittweise von  $U_{SG} = 0$  auf  $U_{SG} = -0.9 \text{ mV}$  'erhöht'.

### 8.3 Wo fließt der aufgeprägte Strom?

Sicherlich kann diese Frage mit einem ortsfesten SET nicht vollständig geklärt werden. Wie wir allerdings in den einleitend vorgestellten Messungen von Erik Ahlswede gesehen haben, sind die äußeren Mikrometer am Rand einer Probe für den Stromfluß wichtig. Mit dem Seitengate in der

Nähe des SETs kann der Rand um ca.  $10\ \mu\text{m}$  verschoben werden, was in etwa dem Bereich entsprechen sollte, in dem der Hall-Spannungsabfall bei Magnetfeldern knapp unterhalb ganzzahliger Füllfaktoren auftreten sollte.

Bei den durchgeführten Messungen wurde daher bei konstantem Magnetfeld die Rückkoppel-

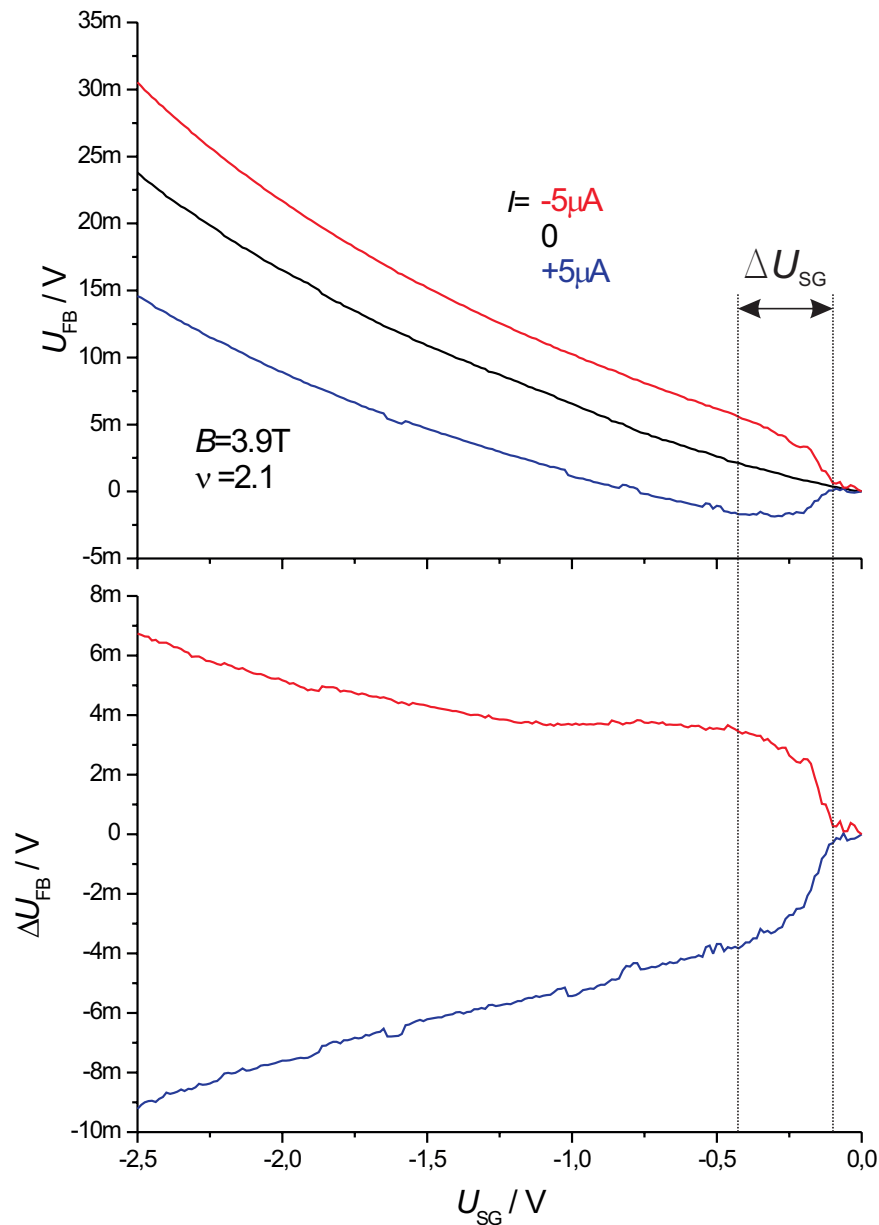


Abbildung 8.5: Oben: Rückkoppelspannung  $U_{FB}$  als Funktion der Seitengate-Spannung  $U_{SG}$  bei den Stromstärken  $I = +5\ \mu\text{A}$ ,  $I = 0$  und  $I = -5\ \mu\text{A}$ . In der Differenz der Kurven mit und ohne Strom sieht man den Anteil des Signals, der durch die Hall-Spannung des angelegten Stromes hervorgerufen wird. Das Intervall der Seitengate-Spannung  $\Delta U_{SG}$  in dem sich  $\Delta U_{FB}$  ändert, ist ein Maß für die Breite des Strompfades.

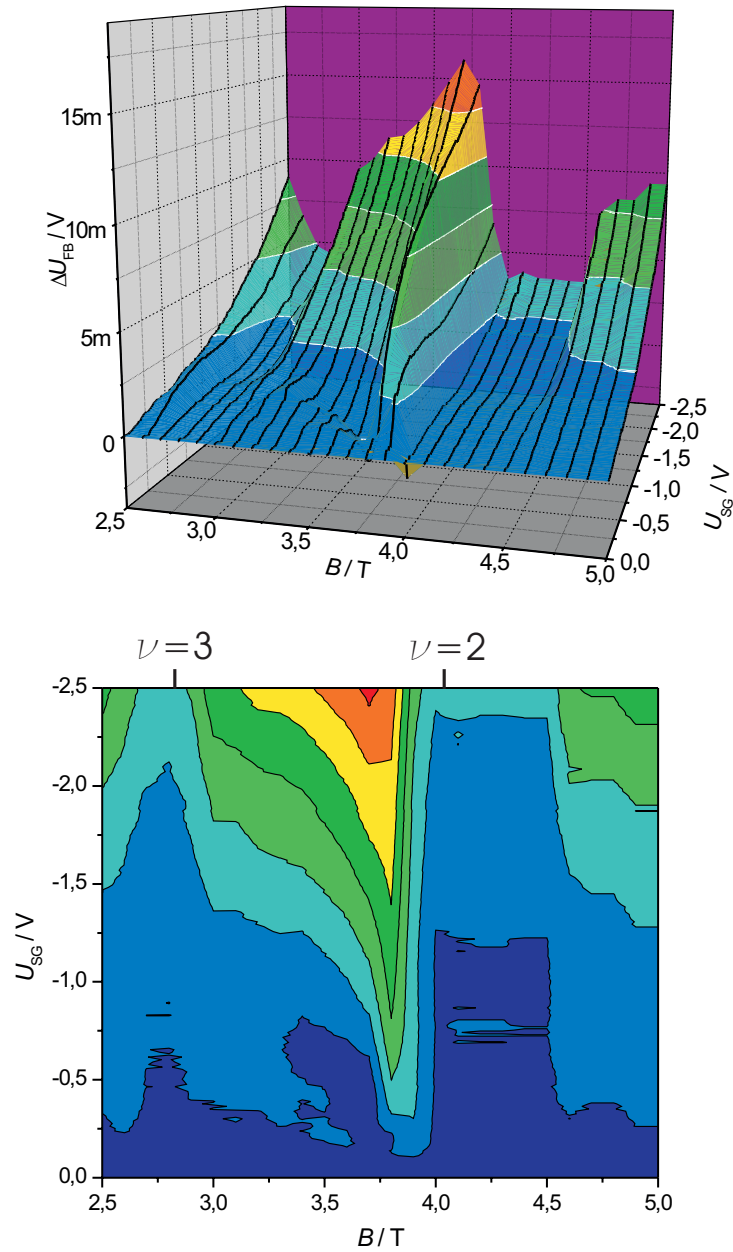


Abbildung 8.6:  $\Delta U_{FB} = U_{FB}(I = 5 \mu A) - U_{FB}(I = 0)$  bei unterschiedlichen Magnetfeldern.

spannung als Funktion der Seitengate-Spannung  $U_{SG}$  mit und ohne Strom gemessen. Die Differenz beider Kurven ist dann der Hall-Spannungsabfall des Stromes, der im vom Seitengate verschobenen Bereich des 2DES unterhalb des SETs fließt. Die Messungen liefen so ab, daß zuerst das Magnetfeld bei ausgeschalteter Rückkoppelscheife angefahren wurde. Dann wurde die Rückkop-

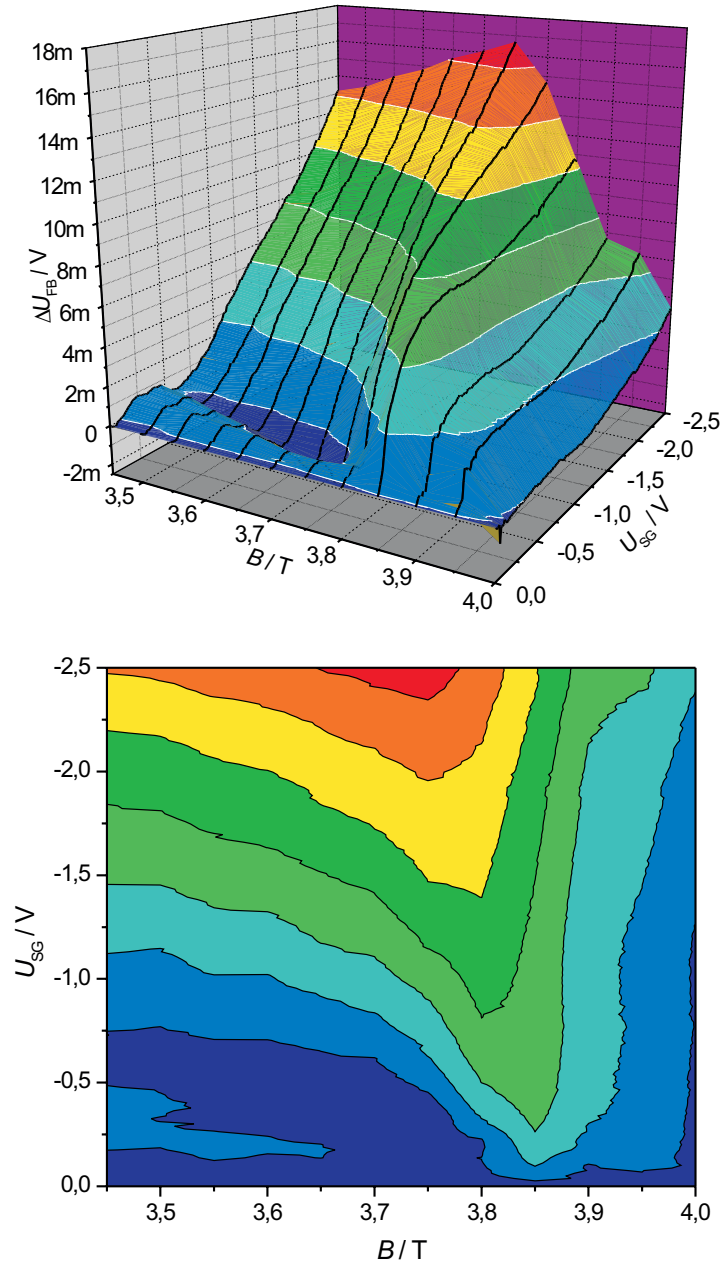


Abbildung 8.7:  $\Delta U_{FB} = U_{FB}(I = 5\mu A) - U_{FB}(I = 0)$  bei unterschiedlichen Magnetfeldern. Es handelt sich hier um die selbe Probe wie in Abbildung 8.5, mit dem Unterschied, daß hier der Bereich vor  $\nu = 2$  höher aufgelöst durchschritten wurde.

pelschleife aktiviert, was bedeutet, daß man keinen absoluten Referenzpunkt hat. Man mißt lediglich eine Änderung der Hall-Spannung relativ zum Startwert. Die SdH-Oszillationen, wie sie in

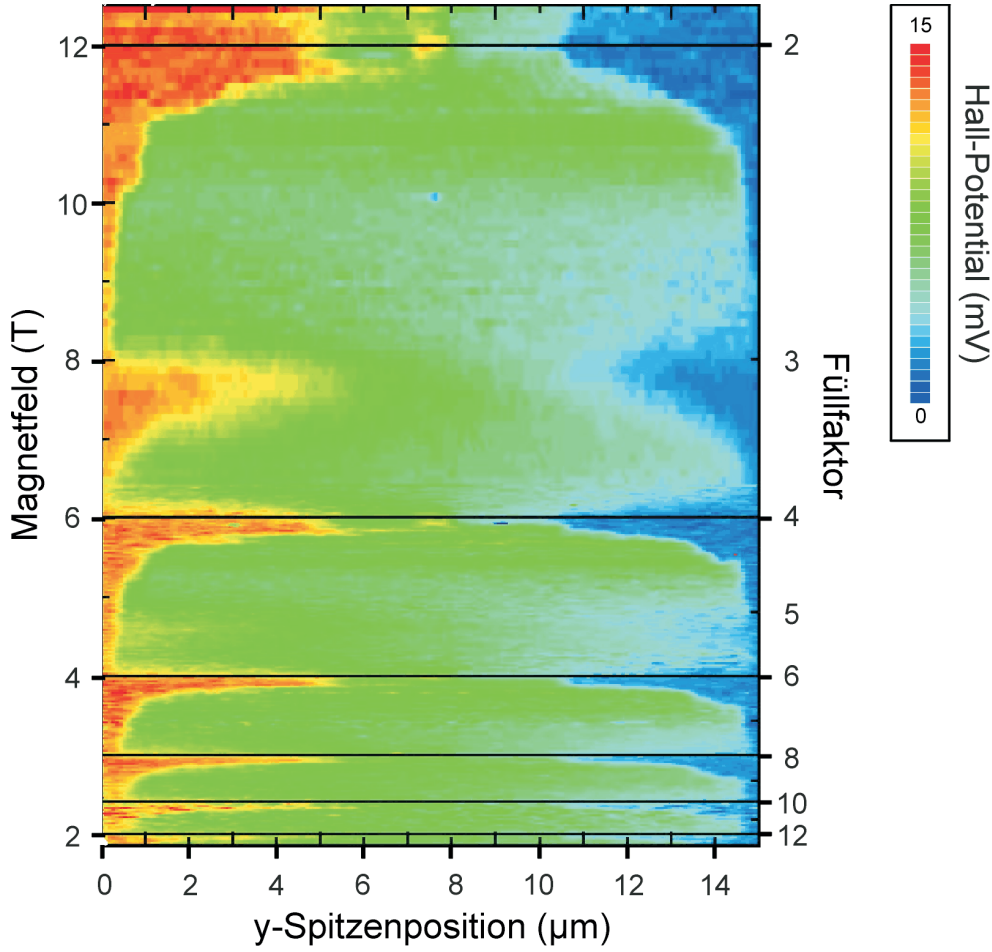


Abbildung 8.8: Falschfarben-Darstellung der Messkurven aus Abbildung 8.1 (aus [Ahl02])

den Abbildungen 8.3 und 8.4 zu sehen sind, tauchen daher nicht auf.

Abbildung 8.5 (oben) zeigt drei Meßkurven  $U_{FB}(U_{SG})$  für die Stromstärken  $I = +5 \mu\text{A}$ ,  $I = 0$  und  $I = -5 \mu\text{A}$ . In der Differenz der Kurven (Abbildung 8.5, unten) sieht man dann, daß der Hall-Spannungsabfall im Bereich bis  $U_{SG} = -0.3 \text{ V}$  der Seitengate-Spannung auftritt, was dafür spricht, daß ein großer Teil der Hall-Spannung auf dieser Seite der Probe in einem Bereich von ca.  $10 \mu\text{m}$  vom Rand des 2DES abfällt. Für  $U_{SG} < -0.3 \text{ V}$  hat der stromtragende Pfad offenbar den SET passiert und verläuft außerhalb der Zone zwischen SET und Seitengate. Der Füllfaktor bei dieser Messung beträgt ca.  $\nu = 2.1$ .

Die Abbildungen 8.6 und 8.7 zeigen eine Schar solcher Messungen über einen großen Magnetfeldbereich. Füllfaktor  $\nu = 2$  liegt bei  $B = 4.1 \text{ T}$ , Füllfaktor  $\nu = 3$  bei  $B = 2.7 \text{ T}$ . Was man in den Messungen bei Magnetfeldern unterhalb ganzzahliger Füllfaktoren wiederfindet, ist das mit Typ III bezeichnete Hall-Potentialprofil, also der Bereich, in dem laut Messungen von Ahlswede *et al.* [Ahl02, Ahl01] und Rechnungen von Güven *et al.* [Gue03] der Hall-Spannungsabfall symmetrisch an beiden Randbereichen der Probe auftritt. Hall-Potentialprofile Typ I und Typ II lassen sich mit dieser Methode nicht so gut nachweisen, da man dafür einen Scanbereich über die gesamte Probenbreite benötigt.

Der Übergang zu Typ II und Typ I deutet sich allerdings an. Man sieht besonders in der hoch aufgelösten Messung aus Abbildung 8.7 sehr deutlich, wie sich der Bereich, in dem der Spannungsabfall auftritt, mit wachsendem Magnetfeld immer weiter ins Probeninnere verlagert. Zum Vergleich zeigt Abbildung 8.8 die Meßkurven aus Abbildung 8.1 noch einmal in einer Falschfarben-Darstellung (aus [Ahl02]).

*Es wird an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß sich der Einfluß der Seitengate-Spannung sehr leicht fehlinterpretieren läßt. Im Intervall  $-0.3 \text{ V} < U_{SG} \leq 0 \text{ V}$  wird der Rand um eine Distanz von ca.  $10 \text{ }\mu\text{m}$  verschoben, während die restlichen  $-2.2 \text{ V}$  lediglich ca. einen halben Mikrometer ausmachen. Aus diesem Grund wurde in den Abbildungen 8.6, 8.7 und 8.5 bei der Skalierung auch auf eine Umrechnung in Längeneinheiten verzichtet.*

Bei einem Strom von  $I = 5 \text{ }\mu\text{A}$  beträgt der halbe Hall-Spannungsabfall, der auf einer Seite der Probe bei einem Potentialprofil Typ III zu erwarten ist,  $U_y/2 = \frac{h}{4e^2} \cdot 5 \text{ }\mu\text{A} \approx 32 \text{ mV}$ , während die maximal gemessene Rückkoppelspannung (in den Meßreihen aus Abbildung 8.6 und 8.7)  $U_{FB} = 17 \text{ mV}$  beträgt. Dies scheint ein Widerspruch zwischen diesen Meßwerten und denen von Erik Ahlswede zu sein. Es ist allerdings zu beachten, daß mit dem Anlegen der Seitengate-Spannung sehr vorsichtig umgegangen wurde und mit  $-2.5 \text{ V} \leq U_{SG} \leq 0 \text{ V}$  nur etwa die Hälfte des Machbaren gemessen wurde<sup>3</sup>. Betrachtet man z. B. in Abbildung 8.7 die Kurve bei  $B = 3.75 \text{ T}$ , so ist zu erwarten, daß diese 'fehlenden'  $15 \text{ mV}$  bei weiterer Erhöhung der (negativen) Seitengate-Spannung  $U_{SG}$  schon nach ein wenig weiterer Variation von  $U_{SG}$  ausfindig gemacht worden wären.

## 8.4 Zusammenfassung

Mit einem am Rand eines Hall-Barrens positionierten SET wurde der Einfluß eines extern aufgeprägten Stromes auf die in Kapitel 7 beschriebenen Nichtgleichgewichtsphänomene untersucht. Ein extern aufgeprägter Stromfluß unterdrückt die Wirbelströme nur auf der niedermagnetischen Seite der Quanten-Hall-Plateau-Bereiche. Bei diesen Magnetfeldern wird der stromtragende innerste inkompressible Streifen breiter und verlagert seine Position ins Innere des 2DES. Ist der Pfad breit genug, daß die kritische Stromdichte die tatsächliche überschreitet, wird dort durch eine zeitliche Änderung des Magnetfeldes zusätzlich ein Wirbelstrom induziert.

Durch das Anlegen einer negativen Spannung an eine zusätzliche Steuerelektrode konnte der Rand des 2DES während der Messungen verschoben werden. Mit Hilfe von Messungen, bei denen bei unterschiedlichen Magnetfeldern der Rand des 2DES in der Nähe des SETs verschoben wurde, während ein Strom von  $\pm 5 \text{ }\mu\text{A}$  durch die Probe floß, konnte der Hall-Spannungsabfall des Stromes gemessen und bedingt räumlich aufgelöst werden. Die Messungen zeigen die Hall-Potentialprofile von Typ III und den Übergang zu Typ II. Potentialprofiltyp I konnte nicht nachgewiesen werden, da sich dort der Strom auf die gesamte Breite des Hall-Barrens verteilt und der SET ortsfest ist. Es konnten somit erstmals die Ergebnisse der Rasterkraft-Messungen von Ahlswede *et al.* [Ahl01, Ahl02] überprüft und bestätigt werden.

---

<sup>3</sup>Man riskiert sehr leicht die Zerstörung der Probe.





# Kapitel 9

## Zusammenfassung und Ausblick

Gegenstand dieser Arbeit sind die Eigenschaften zweidimensionaler Elektronensysteme (2DES) von  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Heterostrukturen. Bei extrem tiefen Temperaturen und hohen Magnetfeldern tritt dort der Quanten-Hall-Effekt (QHE) auf. Beim Quanten-Hall-Effekt zeigt der Hall-Widerstand  $R_{xy} = \frac{U_y}{I}$  bei einer Vierpunkt-Messung eine stufenförmige Entwicklung mit dem Magnetfeld. Auf den Stufen - den sogenannten Plateaus - mißt man im Hall-Widerstand keine nachweisbare Variation, wenn das Magnetfeld leicht variiert wird. Die quantisierten Werte des Hall-Widerstandes betragen  $R_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}$ , wenn eine ganze Zahl von Landau-Niveaus komplett gefüllt ist. Aus diesem Grund haben sich in den letzten Jahren  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Heterostrukturen im Quanten-Hall-Regime in metrologischen Staatsinstituten (wie der PTB) als Referenzwiderstände etabliert. Trotzdem ist heute, mehr als 20 Jahre nach der Entdeckung dieses Effekts, die mikroskopische Natur für die Erklärung der Plateaus im Hall-Widerstand und dem gleichzeitigen Verschwinden des Längswiderstandes noch nicht in einer geschlossenen Theorie geklärt.

In dieser Arbeit wurden hochempfindliche Einzelelektron-Transistoren (SETs) dazu verwendet, etwas über die Potential- und Stromverteilung zweidimensionaler Elektronensysteme im Quanten-Hall-Regime zu lernen. Besonderes Augenmerk wurde dabei Nichtgleichgewichtspänomenen gewidmet, welche dann entstehen, wenn das 2DES durch eine Variation des Magnetfeldes innerhalb der Plateaubereiche aus dem thermodynamischen Gleichgewicht gebracht wird. Es konnten die Beobachtungen zweier Vorgängerarbeiten [Wei98, Hül01] bestätigt und wesentlich genauer analysiert werden.

Metallische Einzelelektron-Transistoren lassen sich als mikroskopische Elektrometer verwenden, welche mit einer submikrometer Ortsauflösung extrem empfindliche Potentialmessungen zulassen. Bei der Herstellung der SETs stand es im Vordergrund, die Abmessungen der SETs möglichst klein zu halten. So wurden mit der Methode der Elektronenstrahl-Lithographie und einer eigens entwickelten 3-Winkel-Bedampfungstechnik SETs hergestellt, deren Inseln einen Durchmesser von nur ca. 150 nm haben. Dies erhöht nicht nur die Ortsauflösung der SETs, sondern vor allem deren maximale Arbeitstemperatur, bis zu welcher Coulomb-Blockade-Oszillationen meßbar sind. Die SETs wurden direkt auf in der PTB hergestellte  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Hall-Barren gedampft. Die Elektronenbeweglichkeiten der zweidimensionalen Elektronensysteme betragen ca.  $0.25 - 0.6 \cdot 10^6 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$ , unbeleuchtet und bei tiefen Temperaturen. Beweglichkeiten dieser Größenordnung haben den Vorteil, daß sie bei einer QHE-Messung sehr breite Plateaus zeigen und der fraktionale QHE nicht, bzw. allenfalls um Füllfaktor  $\nu = \frac{2}{3}$  auftritt.

Auf den  $1 \times 2 \text{ mm}^2$  großen Hall-Barren wurden bis zu 12 SETs gleichzeitig aufgedampft, von

denen jeweils zwei mit einer neu entwickelten Rückkoppelschaltung simultan als Meßsonden verwendet werden können. Das gleichzeitige Messen von Potentialänderungen ist besonders interessant, wenn es darum geht, Korrelationen in dynamischen Relaxationsprozessen an unterschiedlichen Orten des 2DES zu untersuchen.

Obwohl die hier eingesetzten SETs ortsfest sind, konnten räumliche Informationen über den Randbereich dadurch gewonnen werden, daß durch elektrostatische Verarmung mittels einer zusätzlichen Steuerelektrode (Seitengate) der Rand des 2DES relativ zum SET verschoben wurde. Somit ließen sich kompressible und inkompressible Streifen bei Magnetfeldern zwischen 0.5 T und 12.5 T beobachten. Erstmals konnte so auch ein Aufschmelzen der inkompressiblen Streifen bei Erhöhung der Temperatur nachgewiesen werden.

Wird in den dissipationsfreien QHE-Plateaubereichen das Magnetfeld zeitlich variiert, so wird zwischen Probenrand und -zentrum eine elektrostatische Potentialdifferenz induziert, welche aufgrund des anliegenden Magnetfeldes die Hall-Spannung eines Wirbelstromes ist. Es wird also eine Nichtgleichgewichtssituation hervorgerufen, welche nach dem Anhalten der Magnetfeldänderung wieder ins thermodynamische Gleichgewicht relaxiert. Diese Relaxationsprozesse können sich bei tiefen Temperaturen und hohen Magnetfeldern über viele Stunden erstrecken.

Mittels Korrelationsmessungen, bei denen an unterschiedlichen Orten einer Probe mit SETs zeitgleich die elektrostatische Potentialdifferenz zum Rand des 2DES gemessen wurde, wird gezeigt, daß der induzierte Spannungsabfall im Randbereich des 2DES abfällt. Der gesamte innere Bereich des 2DES bildet eine Equipotential-Fläche. Dies deutet darauf hin, daß es sich nicht um einzelne Wirbelströme handelt, sondern um einen globalen Wirbelstrom um die gesamte Probe.

Messungen, bei denen der Rand des 2DES durch eine zusätzliche Steuerelektrode elektrostatisch verschoben wurde, zeigen, daß der Spannungsabfall im inkompressiblen Randbereich des 2DES abfällt, solange das Magnetfeld hinreichend schnell verändert wird und sich der Effekt in seiner Sättigung befindet. Wird das Magnetfeld hingegen sehr langsam bei einem Füllfaktor mit kleiner Energielücke variiert, erstreckt sich der Bereich des Spannungsabfalls über einen breiter werdenden Streifen am Rand des 2DES. Der Ort des Spannungsabfalls relaxiert demnach vom Rand in das Zentrum der Probe. Dies bedeutet, daß nicht nur der innerste inkompressible Streifen, sondern auch das durch intrinsische Potentialfluktuationen in kompressible und inkompressible Gebiete aufgespaltene Innere des 2DES von immenser Bedeutung für diesen Effekt ist.

Im letzten experimentellen Kapitel dieser Arbeit werden schließlich Messungen gezeigt, bei denen der Einfluß eines extern aufgeprägten Stromes auf die Wirbelstrom-Effekte analysiert wird. Es zeigt sich, daß der Ort des Hall-Spannungsabfalls der Wirbelströme mit dem eines extern aufgeprägten Stromes bei Magnetfeldern, welche etwas kleiner als die eines ganzzahligen Füllfaktors sind, zusammenfallen. Der induzierte Wirbelstrom wird erst induziert, wenn sich das Magnetfeld einem ganzzahligen Füllfaktor so weit genähert hat, daß die Summe aus extern aufgeprägtem Strom und Wirbelstrom unterhalb der kritischen Stromdichte des Breakdowns des QHEs liegen. Dies deutet darauf hin, daß der Breakdown des QHEs in diesem Regime durch eine kritische Hall-Feldstärke im innersten inkompressiblen Streifen hervorgerufen wird. Weitere Messungen dieses Kapitels bestätigen die Ergebnisse der Raster-Kraft-Messungen von Peter Weitz [Wei00] und Erik Ahlswede [Ahl02, Ahl01] mit einer anderen Meßmethode.

## Ausblick

Eine Vertiefung und Erweiterung der Experimente dieser Arbeit ist in vielerlei Hinsicht denkbar und sinnvoll:

- Es ist in dieser Arbeit z. B. nicht gelungen, Korrelationsmessungen an Proben mit mehreren Rand-SETs und zusätzlichen SETs im Zentrum der Proben herzustellen. Solche Messungen sind mit der zur Verfügung stehenden Meßelektronik durchführbar und können die hier gewonnenen Ergebnisse weiter vertiefen, bzw. das hier entwickelte Modell bestätigen.
- Für Proben, welche sehr ausgeprägte Wirbelstrom-Effekte zeigen, wäre es sinnvoll, den Arbeitsbereich der Meßelektronik zu erweitern, um auch das Verhalten bei großen induzierten Spannungen analysieren zu können.
- Mit einer Meßelektronik, welche einen erweiterten Arbeitsbereich hat, könnte auch der Breakdown des QHEs bei hohen Stromstärken detailliert untersucht werden.
- Das Sinnvollste ist aber sicherlich das konsequente Umstellen der Meßtechnik auf SETs, welche sich auf positionierbaren Meßspitzen befinden. Auch wenn diese Meßtechnik in der Anfangsphase erhebliche technologische Probleme hervorrufen dürfte, kann man davon ausgehen, daß so eine andere Qualität der Ortsauflösung erzielt werden kann.



# Anhang A

## Daten der verwendeten Proben

Probe	$n(4.2\text{ K})/\text{cm}^{-2}$	$\mu(4.2\text{ K})/\frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$	Abbildung
P252	$2.9 \cdot 10^{11}$	310000	5.3
P259	$2.16 \cdot 10^{11}$	320000	5.4 5.6 5.7 7.12 7.13
P446	$1.8 \cdot 10^{11}$	610000	2.4 2.5 3.6 3.8 5.8 6.4 6.5 6.7 6.8 7.9 7.10 7.14 7.22 7.23 7.24 8.3 8.4 8.5 8.6 8.7
P448	$2.5 \cdot 10^{11}$	630000	7.5 7.7 7.8 7.15 7.18 7.19 7.20 7.21

Tabelle A.1: Daten und PTB-interne Bezeichnungen der in dieser Arbeit verwendeten 2DES-Substrate. Die Ladungsträgerkonzentrationen und die Beweglichkeiten wurden unbeleuchtet in Van der Pauw-Meßtechnik [Sun96] bestimmt und decken sich zum Teil nicht exakt mit den in dieser Arbeit bestimmten Werten. In der Regel wurde bei den hier durchgeführten Messungen eine geringere Beweglichkeit bestimmt, was an der komplexeren Probenprozessierung liegen kann.



# Literaturverzeichnis

- [Ahl01] E. Ahlswede, J. Weis, K. v. Klitzing, *Physica B* **298**, 562 (2001).
- [Ahl02] Erik Ahlswede, Dissertation, Stuttgart (2002).
- [And74] T. Ando and Y. Uemura, *Phys. Soc. Japan* **36**, 959 (1974).
- [And82] T. Ando, a. B. Fowler, F. Stern, *Rev. Mod. Phys* **54**, 437-672 (1982).
- [And94] T. Ando, *Physica B* **201**, 331 (1994).
- [Bec00] U. Becker, F. Ahlers, PTB-interne Daten, zu finden im Qualitätsmanagement-System des Fachlabors 2.51 der PTB in Braunschweig (2000-2003).
- [Bee90] C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 216 (1990.).
- [Ber92] Bermann • Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band 6, ISBN: 3-11-012605-2 (1992).
- [Ber99] T. Bergsten, T. Claeson, and P. Delsing, *J. Appl. Phys.* **86** 3844 (Oct 1999).
- [Ber01] T. Bergsten, T. Claeson, and P. Delsing, *Appl. Phys. Lett.* **78** 1264 (2001).
- [Bra97] E. Braun, B. Schumacher, P. Warnecke, G. Landwehr, W. Ossau, *World Scientific*, 1005 (1997).
- [Bra81] N. Braslau, *J. Vac. Sci. Technol.* **19** (3), 803 (1981).
- [But86] M. Büttiker, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1761 (1986).
- [But88] M. Büttiker, *Phys. Rev. B* **38**, 9375 (1988).
- [Cas8] H. C. Casey, M. Panish: *Heterostructure Lasers*, Part A and B, New York Academic Press (1978).
- [Cha90] A. M. Chang, *Solid state Comm.* **74**, 871 (1990).
- [Che92] W. Chen, M. Dumas, D. Mao, A. Kahn, *J. Vac. Sci. Technol.* **B** 10, 1886 (1992).
- [Chk92] D. B. Chklovskii, B. I. Shklovskii, L. I. Glazman, *Phys. Rev. B* **46**, 4026 (1992).
- [Chk93] D. B. Chklovskii and P. A. Lee, *Phys. Rev. B* **48**, 18060 (1993).

- [Coh95] E. R. Cohen, B. N. Taylor, *Codata Bulletin*, **95** (1995).
- [Das85] S. Das Sarma, F. Stern, *Phys. Rev. B* **32**, S. 8442 (1985).
- [Dav98] J. H. Davies, *The physics of low-dimensional semiconductors*, Cambridge University Press, (1998).
- [Dol88] G. J. Dolan and J. H. Dunsmuir, *Physica B* **152**, 7 (1988).
- [Dol90] V. T. Dolgoplov, N. B. Zhitenev and A. A. Shashkin, *JETP Letters* **52**, 196 (1990).
- [Dol92] V. T. Dolgoplov, N. B. Zhitenev A. A. Shashkin, S. I. Dorozhkin and K. v. Klitzing, *Phys. Rev. B* **46**, 12560 (1992).
- [Dol01] V. T. Dolgoplov, A. A. Shashkin, J. M. Broto, H. Rakoto and S. Askenazy , *Phys. Rev. Lett* **86**, 5566 (2001).
- [Eav86] L. Eaves, F. W. Sheard, *Semicond. Sci. Technol.* **1**, 346 (1986).
- [Ebe85] G. Ebert, K. v. Klitzing und G. Weimann, *J. Phys. C* **18**, L257 (1985).
- [Ebe01] J. Ebbecke, Dissertation, PTB-Bericht **PTB-E-77**, ISBN: 3-89701-812-8 (Braunschweig, 2001).
- [Efr88] A. L. Efros, *Solid state Comm.* **67**, 1019 (1988).
- [Fin00] G. Finkelstein, P. I. Glicofridis, S. H. Tessmer, R. C. Ashoori und M. R. Melloch, *Phys. Rev. B* **61**, R16323 (2000).
- [Fin00a] G. Finkelstein, P. I. Glicofridis, R. C. Ashoori und M. Shayegan, *Science* **289**, 90 (2000).
- [Fon91] P. F. Fontein *et al.* *Phys. Rev. B* **43**, 12090 (1991).
- [Fon92] P. F. Fontein *et al.* *Surface Sci.* **263**, 91 (1992).
- [Fuj01] H. Fujioka, S. Katsumoto, Y. Iye, *Jpn. J. Appl. Phys* **40**, 2073 (2001).
- [Gue03] K. Güven und R. Gerhardt, *Phys. Rev. B* **67**, 115327 (2003).
- [Hal82] B. I. Halperin, *Phys. Rev. B* **25**, 2185 (1982).
- [Har85] J. P. Harrang, R. J. Higgins, R. K. Goodall, P. R. Ray, M. Laviro, P. Delescluse, *Phys. Rev. B* **32** 8126-8135 (1985).
- [Hau93] Review Article: *Edge-state transport and its experimental consequence in high magnetic fields*, *Semicond. Sci. Technol.* **8**, 131 (1993).
- [Hes98] H. F. Hess, T. A. Fulton, M. J. Yoo und A. Yacoby, *Solid. State Comm.* **107**, 657 (1998).
- [Hül01] J. Hüls, Dissertation, Hamburg (2001).
- [Hit72] Otto Hittmair: *Lehrbuch der Quantentheorie*, München: Verlag Karl Thiemeig (1972).



- [Iba99] H. Ibach und H. Lüth *Festkörperphysik*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- [Ila00] S. Ilani, A. Yacoby, D. Mahalu and H. Shtrikman, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3133 (2000).
- [Ila04] S. Ilani, J. Martin, E. Teitelbaum, J. H. Smet, D. Mahalu, V. Umansky and A. Yacoby, *Nature* **427**, 328 (2004).
- [Jec95] B. Jeckelmann *et al.*, *IEEE Trans Meas.* **44**, 269 (1995).
- [Jec01] B. Jeckelmann and B. Jeanneret, *Rep. Prog. Phys.* **64**, 1603 (2001).
- [Jef98] A. Jeffrey, R. E. Elmquist, J. Q. Shields, L. H. Lee, M. E. Cage, S. H. shields and R. F. Dziuba, *Metrologica* **35**, 83 (1998).
- [Jon95] C. L. Jones *et al.*, *Solid state comm.* **95**, 409-413 (1995).
- [Jon97] C. L. Jones *et al.*, *Solid state comm.* **97**, 763-768 (1996).
- [Kav03] K. V. Kavokin, M. E. Portnoi, A. J. Matthews, J. Gething, A. Usher, D. A. Ritchie, and M. Y. Simmons, *Proc. 11th int. Symposium Nanostructures: Physics and Technology*, ISBN:5-93634-009-9, St. Petersburg (2003).
- [Kaw93] S. Kawaji, H. Hirakawa, M. Nagata, *Physica B* **184**, 17 (1993).
- [Kaw96] S. Kawaji *Semicond. Sci. Technol.* **11**, 1541 (1996).
- [Kla92] U. Klass, W. Dietsche, K. v. Klitzing und K. Ploog, *Surf. Sci.* **263**, 97 (1992).
- [Kli80] K. v. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, *Phys. rev. Lett.* **45**, 494 (1980).
- [Kli93] K. v. Klitzing, *Physica B* **184**, 1 (1993).
- [Kli95] K. v. Klitzing, *Physica B* **204**, 111 (1995).
- [Kno94] R. Knott, W. Dietsche, K. v. Klitzing, K. Eberl und K. Ploog, *Solid State Electr.* **37**, 689 (1994).
- [Kno95] R. Knott, W. Dietsche, K. v. Klitzing und K. Ploog, *Semicond. Sci. Technol.* **10**, 117 (1995).
- [Kys83] D. F. Kyser, *J. Vac Sci. Technol.* **B 1**, 1391 (1983).
- [Lau82] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. B* **23**, 5632 (1982).
- [Lar95] I. A. Larkin and J. H. Davies *Phys. Rev. B* **52**, 5535 (1995).
- [Lie94] K. Lier and R. R. Gerhardts, *Phys. Rev. B* **50**, 7757 (1994).
- [Mat00] A. J. Matthews *et al.*, *Physica E* **6**, 140 (2000).
- [Mat03] A. J. Matthews, persönliche Mitteilung auf der EP2DS-15 in Nara (2003).

- [McC99] K. L. Mc Cormick, M. T. Woodside, M. Huang, M. Wu, P. L. McEuen, C. Duruoaz und J. S. Harris, Phys. Rev. B **59**, 4654 (1999).
- [Nach99] G. Nachtwei, Review article: *Breakdown of the quantum Hall effect*, Physica E **4**, 79 (1999).
- [Nix91] J. A. Nixon, J. H. Davies, H. U. Baranger, Phys. Rev. B **43**, 12638 (1991).
- [Phy00] Physik, Deutsche Physikalische Gesellschaft e. V. November 2000, ISBN 3-00-006876-7.
- [Sch96] H. Scherer, Dissertationsschrift, ISBN 3-89588-399-9, Cuvillier Verlag Göttingen, (1996).
- [Sch01] D. Schneider, T. Klaffs, K. Pierz, F. J. Ahlers, Physica B **298**, 234 (2001).
- [sch02] M. Schwarz et al. Phys Rev. B **65** (2002).
- [Sic85] E. K. Sichel, H. H. Sample and J. P. Salerno, Phys. Rev. B **32**, 6975 (1985).
- [Smr86] A. Ishihara, L. Smrcka, J. Phys C **19**, 6777-6789 (1986).
- [Sni90] I-H. Tan, G. L. Snider, L. D. Chang, and E. L. Hu, J. Appl. Phys. **68**, 4071 (1990).
- [Sop80] K. P. sopka: *The discovery of the Hall effect: Edwin Hall's hitherto unpublished Account*, in *The Hall Effect and it's Application*, edited by C. C. Chien and C. R. Westgate, Plenum Press (New York), 523 (1980).
- [Sta85] E. Stahl, D. Weis, G. Weimann and K. von Klitzing, K. Ploog, J. Phys C **18**, L783 (1985).
- [Sun96] Y. Sun, J. Shi, Q. Meng, Semicond. Sci. Technol. **11**, 805 (1996).
- [Sve92] S. P. Svensson, J. Kanski, T. G. Andersson and P.-O. Nilsson, J. Vac. Sci. Technol. **B 2**, 235 (1984).
- [Ter73] D. W. Terwilliger, and R. J. Higgins, Phys. Rev. B **7**, 667 (1973).
- [Tes98] S. Tessmer, P. I. Glicofridis, R. C. Ashoori, L. S. Levitov und M. R. Melloch, Nature **392**, 51 (1998).
- [Tho98] S. Thoms, D. S. Macintyre, M. McCarthy, Microelectronic Engineering **41/42**, 207 (1998).
- [Tsu82] D. Tsui, H. Störmer, und A. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).
- [Wat98] J. P. Watts et al. Phys. Rev. Lett. **81**, 4220-4224 (1998).
- [Wee88] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. Beenaker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, C. T. Foxon, Phys. Rev. Lett. **60**, 848 (1988).
- [Wee88a] B. J. van Wees, L. P. Kouwenhoven, H. van Houten, C. W. Beenaker, J. E. Mooij, C. T. Foxon, J. J. Harris, Phys. Rev. B **38**, 3625 (1988).
- [Wei97] Y. Wei, J. Weis, K. v. Klitzing, and K. Eberl, Appl. Phys. Lett. **71**, 2514 (1997).

- [Wei98] Y. Wei, J. Weis, K. v. Klitzing, and K. Eberl, Phys. Rev. Lett. **81**, 1674 (1998).
- [Wei98] Y. Wei, Dissertation, Stuttgart (1998).
- [Wei98a] J. Weis, Y. Wei, K. v. Klitzing, Physica E **3**, 23 (1998).
- [Wei02] J. Weis, *Electrical Transport Through Quantum Dot Systems*, Habilitationsschrift (2002).
- [Wei98b] J. Weis, Y. Wei, K. v. Klitzing, Physica B **256-258**, 1 (1998).
- [Wei86] D. Weis, E. Stahl, G. Weimann, K. Ploog and K. von Klitzing, Surface Science **170**, 285 (1986).
- [Wei00] P. Weits, E. Ahlswede, J. Weis K. v. Klitzing, and K. Eberl, Physica E **6**, 247 (2000).
- [Yac99] A. Yacoby, H. F. Hess, T. A. Fulton, L. N. Pfeiffer and K. W. West, Solid state Comm. **111**, 1 (1999).
- [Yoo97] M. J. Yoo, T. A. Fulton, H. F. Hess, R. L. Willett, L. N. Dunkleberger, R. J. Chichester, L. N. Pfeiffer, K. W. West, Science, **276**, 579 (1997).
- [Zaw84] W. Zawadzki, Solid State Sciences **53**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1984).
- [Zhe85] H. Z. Zheng, D. C. Tsui and A. M. Chang, Phys. Rev. B **32**, 5506 (1985).



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die direkt oder indirekt zum Abschluß dieser Arbeit beigetragen haben.

Zuerst möchte ich mich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Georg Nachtwei für die Betreuung meiner Arbeit und die konstruktiven Diskussionen zum Thema 'Quanten-Hall-Effekt' bedanken.

Weiterer Dank gilt Herrn Prof. Dr. R. J. Haug für die Übernahme des Koreferates.

Bei allen Mitarbeitern des Labors 2.41 der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt in Braunschweig möchte ich mich für die schöne gemeinsame Zeit bedanken. Besonderer Dank gilt dabei meinem Betreuer, Herrn Dr. Franz Ahlers. Während der etwas mehr als drei Jahre an der PTB und der Zeit danach habe ich seine freundschaftliche und kompetente Unterstützung stets sehr geschätzt.

Des weiteren bedanke ich mich bei

- Herrn Dr. Jürgen Weis vom Max-Planck-Institut für Festkörperforschung in Stuttgart für die fachliche Unterstützung (meist in Form von sehr langen Telefongesprächen),
- meinem ehemaligen Mitstreiter Herrn Dr. Jens Ebbecke für die gute Zusammenarbeit im Labor und dem vielen Spaß, den wir auf unseren gemeinsamen Dienstreisen hatten,
- den Herren Dr. Thomas Weimann und Peter Hinze für die Unterstützung in Sachen Elektronenstrahl-Lithographie,
- Herrn Dr. Vladimir 'Volodya' Krupenin vom Laboratory of Cryoelectronics der Staatsuniversität Moskau für die Unterstützung bei der SET-Meßtechnik,
- den Herren Dr. Klaus Pierz und Holger Marx für das Wachsen der Heterostrukturen,
- Frau Christine Schwarzbach für das Korrekturlesen dieser Arbeit und
- Herrn Dr. Frank Hitzel für die vielen Anregungen und Ideen, die sich aus unseren Gesprächen seit dem Beginn unserer Diplomarbeiten ergeben haben.

Nicht zuletzt bedanke ich mich noch bei meiner Lebensgefährtin Sabine und unserer Tochter Meret für die moralische Unterstützung sowie bei meinen Eltern, die mich während meiner gesamten Ausbildung mit aller Kraft unterstützt haben.

Finanziell ermöglicht wurde diese Arbeit durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft, welche es durch die Gewährung einer Sachbeihilfe im Rahmen des Schwerpunktprogramms 'Quanten-Hall-Systeme' der PTB ermöglicht hat, mich einzustellen.



# Lebenslauf

Torsten Klaffs	geboren am 2.1.1971 in Wolfsburg, ledig, ein Kind
1977-1983	Grund- und Orientierungsschule in Rühren
1983-1988	Theodor-Heuss-Gymnasium in Wolfsburg
1988-1991	Fachgymnasium Technik (Maschinenbau) in Wolfsburg
Mai 1991	Abitur
1991-1999	Studium der Physik an der Technischen Universität Braunschweig
1994	Diplomvorprüfung
1998-1999	Diplomarbeit am Institut für Technische Physik, Arbeitsgruppe D. Schneider: 'Einfluß starker paralleler Felder auf das zweidimensionale Elektronengas einer GaAs/Al <sub>0.3</sub> Ga <sub>0.7</sub> As-Heterostruktur'
Mai 1999	Diplomhauptprüfung
25.5.1999 - 14.5.2000	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Halbleitertechnik der TU-Braunschweig: Mitarbeit am Projekt 'Quantenkaskaden-Laser auf In <sub>x</sub> Ga <sub>1-x</sub> As <sub>y</sub> P <sub>y-1</sub> -Basis'
15.5.2000 - 17.8.2003	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt in Braunschweig, Fachbereich Quantenelektronik, Durchführung der Messungen der vorliegenden Dissertation
seit 18.8.2003	Studienrat z. A. an den berufsbildenden Schulen II des Landkreises Gifhorn mit Einsatz an der Außenstelle in Hankensbüttel. Unterrichtsfach: Fachtheorie (Augenoptik)